

A ENGENHARIA DIDÁTICA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA:

**o estudo da generalização
e complexificação da
Sequência de Padovan**

RENATA PASSOS MACHADO VIEIRA
FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES
PAULA MARIA MACHADO CRUZ CATARINO



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

A ENGENHARIA DIDÁTICA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA:

**o estudo da generalização
e complexificação da
Sequência de Padovan**

**Presidente da República**

Luiz Inácio Lula da Silva

Ministro da Educação

Camilo Sobreira de Santana

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ - IFCE****Reitor**

José Wally Mendonça Menezes

Pró-Reitora de Pesquisa, Pós-graduação e Inovação

Joélia Marques de Carvalho

Pró-Reitora de Ensino

Cristiane Borges Braga

Pró-Reitora de Extensão

Ana Claudia Uchôa Araújo

Pró-Reitor de Administração e Planejamento

Reuber Saraiva de Santiago

Pró-Reitor de Gestão de Pessoas

Marcel Ribeiro Mendonça

**EDITORA IFCE****Editor Executivo**

Tiago Estevam Gonçalves

CONSELHEIROS NATOS

Ana Cláudia Uchoa Araújo

Cristiane Borges Braga

Joélia Marques de Carvalho

Sara Maria Peres de Moraes

Tiago Estevam Gonçalves (Presidente)

CONSELHEIROS TITULARES

Alisandra Cavalcante Fernandes de Almeida

Ana Cristina da Silva Moraes (in memoriam)

Anderson Ibsen Lopes de Souza

Anna Erika Ferreira Lima (in memoriam)

Antônio Cavalcante de Almeida

Antônio Wendel de Oliveira Rodrigues

Auzuir Ripardo de Alexandria

Barbara Suellen Ferreira Rodrigues

Beatriz Helena Peixoto Brandão

Cristiane Sousa da Silva

Francisco Régis Vieira Alves

Glauber Carvalho Nobre

Glendo de Freitas Guimarães

Iara Rafaela Gomes (UFC)

Igor de Moraes Paim

José Eranildo Teles do Nascimento

Keila Cristina Nicolau Mota

Leonardo Araújo da Costa (UFC)

Marcílio Costa Teixeira

Maria do Socorro de Assis Braun

Marieta Maria Martins Lauar

Marilene Barbosa Pinheiro

Nara Lidia Mendes Alencar

Rômmulo Celly Lima Siqueira

Sandro César Silveira Jucá

Sarah Mesquita Lima

Wendel Alves de Medeiros

A ENGENHARIA DIDÁTICA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA:

**o estudo da generalização
e complexificação da
Sequência de Padovan**

RENATA PASSOS MACHADO VIEIRA
FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES
PAULA MARIA MACHADO CRUZ CATARINO

Fortaleza-CE
2023



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

A Engenharia Didática na Formação Inicial de Professores de Matemática: o estudo da generalização e complexificação da Sequência de Padovan. Renata Passos Machado Vieira, Francisco Regis Vieira Alves, Paula Maria Machado Cruz Catarino.

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação – PRPI
Editora IFCE – EDIFCE

As informações contidas no livro são de inteira responsabilidade dos seus autores.

EDITORA IFCE

Editor Executivo

Tiago Estevam Gonçalves

Editora Adjunta e Normalização

Sara Maria Peres de Moraes

Revisão

Marilene Barbosa Pinheiro

Supervisão de Design e Capa

Julio Pio

Lidia Farias

Diagramação

Editora SertãoCult



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Editora IFCE - EDIFCE

V658e Vieira, Renata Passos Machado.

A Engenharia didática na formação inicial de professores de matemática: o estudo da generalização e complexificação da sequência de Padovan. / Renata Passos Machado Vieira, Francisco Regis Vieira Alves e Paula Maria Machado Cruz Catarino --. Fortaleza: EDIFCE, 2023.

193 p. il.

E-book no formato PDF 46.373 KB
ISBN: 978-65-84792-29-6 (*e-book*)
ISBN: 978-65-84792-30-2 (impresso)
DOI: 10.21439/EDIFCE.14

1. Matemática. 2. Didática. 3. Sequência de Padovan. I. Alves, Francisco Regis Vieira. II. Catarino, Paula Maria Machado Cruz. III. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (EDIFCE). IV. Título

CDD 510

Bibliotecária responsável: Sara Maria Peres de Moraes CRB Nº 3/901



Contato

Rua Jorge Dumar, 1703 - Jardim América, Fortaleza - CE, 60410-426.
Fone: (85)34012263 / E-mail: edifce@ifce.edu.br / Site: editora.ifce.edu.br.

AGRADECIMENTOS

Este livro é oriundo de uma pesquisa realizada no âmbito do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará – campus Fortaleza e, do Doutorado em Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN) – polo Universidade Federal do Ceará (UFC). Dada a vinculação aos Programas de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do IFCE-campus Fortaleza e Pós-Graduação em Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN) da UFC, os autores agradecem o apoio financeiro oportuno ao custeio da obra em específico ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ), à Fundação Cearense e Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP) e à Pró-reitoria de Pesquisa, Pós-graduação e Inovação (PRPI).

Também agradecer ao Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores - CIDTFF, pelo financiamento com fundos portugueses através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia - FCT

Este trabalho é dedicado a Deus, Nossa Senhora Mãe Rainha, minha mãe e minha tia Bia, por serem os meus alicerces.



SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	11
1 A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA E DA DIDÁTICA MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA: ARGUMENTOS E ORIENTAÇÕES	15
2 A ENGENHARIA DIDÁTICA E A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	23
3 SEQUÊNCIAS LINEARES RECURSIVAS.....	39
4 A SEQUÊNCIA DE PADOVAN	45
5 CAMPO EPISTÊMICO-MATEMÁTICO: A GENERALIZAÇÃO E COMPLEXIFICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE PADOVAN.....	55
6 UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA: O ESTUDO DO MODELO DE PADOVAN NO CURSO DE LICENCIATURA.....	137
7 EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISES - DISCUSSÕES DOS DADOS....	149
8 O FRACTAL DE NEWTON COMO FORMA DE VISUALIZAÇÃO ALTERNATIVA DE SEQUÊNCIAS LINEARES E RECORRENTES.....	167
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	179
REFERÊNCIAS.....	183
SOBRE OS AUTORES.....	183



APRESENTAÇÃO

O componente de História da Matemática se mostra imprescindível, quando examinamos um amplo espectro ou repertório de conhecimentos, habilidades profissionais e saberes técnicos e científicos necessários para a atividade do professor de Matemática. Por outro lado, tal componente precisa ser examinado, de forma minuciosa e precisa, na medida em que possa figurar ou desempenhar dois papéis distintos, quando objetivamos a atividade profissional do professor de Matemática.

Um primeiro papel se consubstancia na medida em que o componente de História da Matemática se revela como um eixo estruturante e fator essencial na função de alimentar/estimular uma compreensão de natureza histórica, de natureza epistemológica, e um viés evolutivo do saber científico matemático. Ainda neste escopo, a História da Matemática proporciona uma visão local e global sobre processos matemáticos evolutivos, problemas e determinados obstáculos epistemológicos inescapáveis. Esses, entretanto, colocaram à prova um componente de genialidade e testaram a perspicácia de inúmeros matemáticos considerados de um passado remoto, bem como desafiaram inúmeros matemáticos que contribuíram recentemente para a evolução de um ‘edifício matemático’, se, neste momento, parafrasearmos o ponto de vista de Davis e Rersh (1990).

Um segundo papel do componente de História da Matemática, inserido naturalmente em um contexto de formação do professor de Matemática, diz respeito ao processo de incorporação de certas concepções que desconsideram um caráter evolutivo dos objetos teóricos e dos conceitos

científicos da Matemática. Nesse contexto, podemos identificar um discurso magistral ou uma retórica inquestionável, todavia, destituída de um interesse em comunicar os verdadeiros processos matemáticos de gênese e de evolução das ideias originais, de conceitos, e uma verdadeira constituição e formulação de definições matemáticas.

Assim, assinalamos algumas concepções equivocadas que costumam ser encontradas no âmbito de utilização da História da Matemática, por intermédio de um estilo acadêmico questionável que assume um expediente de comunicar pequenas histórias, de registrar alguns fatos isolados, nuances curiosas, e apontar elementos pitorescos ocorridos na vida de matemáticos, sem uma preocupação necessária de resgatar sua repercussão até os dias atuais; sobretudo, desconsiderando o caráter não estático e um itinerário evolutivo, irrefreável das ideias matemáticas. Por outro lado, o papel desempenhado pelo professor de Matemática requer considerar tanto um saber científico necessário de referência como a adoção de determinados pressupostos capazes de indicar um itinerário, de determinar uma abordagem ou uma transposição didática adequada desses saberes.

Isso posto, trazemos, na presente obra, um exemplo concreto de utilização e exploração do componente de História da Matemática, a partir de algo pouco considerado pelos autores de compêndios de História da Matemática: o conceito de sequência numérica recursiva e sua correspondente evolução histórica, seu caráter matemático e seu significado epistemológico. De modo especial, discutiremos a generalização e a complexificação da sequência de Padovan ou de Coordonier intimamente relacionada com outra sequência numérica, a de Fibonacci, que costuma ser, aparentemente, o caso mais emblemático de uma sequência numérica homogênea, recorrente e de 2ª ordem, e que se tornou popular pela história de reprodução de coelhos imortais.

De forma recorrente, a sequência de Fibonacci, atribuída pela maioria dos autores de livros de História da Matemática ao antigo matemático italiano Leonardo Pisano (1170 – 1270), é descrita pela seguinte relação de recorrência clássica:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2 \quad (*)$$

Todavia, podemos identificar literatura científica pertinente, pois tais relações numéricas derivadas de (*) já são conhecidas há muito tempo e empregadas no comércio indiano. Depois de séculos, podemos encontrar em literatura científica que a sequência de Fibonacci pode ser generalizada. Assim, tem sentido matemático falarmos sobre sequências: tribonacci; tetranacci; pentanacci; hexanacci, etc.

Por outro lado, a de Padovan ou de Coordonier, além de ter inúmeras propriedades matemáticas semelhantes à de Fibonacci, tem um caráter surpreendente de generalização semelhante, como o leitor poderá constatar nos capítulos subsequentes. Por fim, na presente obra, buscamos tanto imprimir um viés de utilização da História da Matemática, através de um caso particular, com a discussão do caso da sequência de Padovan ou de Coordonier, como uma discussão sobre um cenário de formação profissional inicial do professor de Matemática.

Indicaremos, por fim, um itinerário investigativo, que assume os pressupostos da noção de Engenharia Didática, com o escopo de organizar e tornar sistemático e reprodutível um conjunto de situações didáticas profissionais, envolvendo o ensino de conceitos derivados da sequência de Padovan ou de Coordonier. A presente obra constitui uma contribuição em um cenário de divulgação científica sobre um estudo ampliado das sequências numéricas recorrentes e, nesse sentido, assinalamos um caráter de cooperação científica envolvendo Brasil e Portugal.

1

A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA E DA DIDÁTICA MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA: ARGUMENTOS E ORIENTAÇÕES

Sobre a Didática da Matemática (Didactiques de Mathématique – DM), os primeiros estudos foram desenvolvidos na França nas décadas de 1960, 1970 e 1980 na fundação da Comissão Internacional de Instrução Matemática, relatando um forte interesse pelo trinômio clássico: professor-aluno-saber. No Brasil, recebendo o nome de Educação Matemática, relata-se que o principal elemento do trinômio, ao realizar uma transposição didática, é o professor. De acordo com Alves (2018), dois elementos merecem destaque na chegada dessa didática ao Brasil: i) o movimento da pesquisa em relação ao ensino de Ciência e Matemática; ii) campo efetivo de atuação, onde o aluno torna-se um sujeito analisado com bastante clareza pelo professor.

A definição sobre a DM é apresentada como:

A didática da matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (PAIS, 2011, p.11).

Embora o foco esteja no professor, é bom enfatizar a importância do aluno, visto que também é colocado no centro do processo de aprendizagem, cabendo ao docente guiá-lo de forma correta para determinadas situações-problema a serem resolvidas. Essa DM reúne pesquisas investigativas em relação ao surgimento de possíveis obstáculos na construção epistemológica de conceitos matemáticos em situações de ensino. Diante desse cenário, realiza-se um estudo sobre a evolução histórica e investigativa da Sequência de Padovan (SP), a fim de transformá-la em um conteúdo a ser ensinado.

Nesse sentido, aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos são considerados como pressupostos desta pesquisa, organizada e escri-

ta conforme a estrutura metodológica da Engenharia Didática Clássica ou Engenharia Didática (ED) de 1ª Geração, de Artigue (1988), em complementaridade à Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1976). Com isso, apresenta-se o percurso inicial traçado para esta pesquisa, realizam-se análises prévias fundamentadas na ED, discutindo a problemática e a justificativa da pesquisa, e, finalmente, apresentam-se a questão norteadora e os respectivos objetivos.

Segundo as concepções de Almouloud e Silva (2012), as análises prévias desta pesquisa foram executadas baseadas na ED, organizando-se esse processo em duas etapas: na primeira, fez-se uma revisão bibliográfica sobre a metodologia de pesquisa, a teoria de ensino e a SP; e, na segunda, a abordagem didática e cognitiva da SP foram descritas e relacionadas ao contexto de sua aplicação e desenvolvimento da pesquisa.

Inicialmente, realizou-se a construção do referencial teórico referente à SP, ED e TSD, para serem estudados *a posteriori*, com o objetivo de definir a problemática da pesquisa e assim traçar os seus objetivos, sendo destacadas as dissertações de mestrado de Oliveira (2018) e de Santos (2017). Esta última trabalhou o processo de generalização da Sequência de Fibonacci (SF) através da fórmula de Binet e de sua extensão para os números inteiros, e a primeira estudou o processo de complexificação do modelo de Fibonacci. Em ambas as dissertações, observa-se a existência da ED em associação com a TSD, destacando-se ainda um momento para a análise matemática, através do campo epistêmico-matemático e, outro para a reflexão das metodologias de pesquisa e ensino.

Antes de iniciar o conteúdo matemático deste trabalho, construiu-se uma base sobre as sequências lineares e recorrentes sustentada nos trabalhos de Ercolano (1979) e Zierler (1959). Com isso, foram realizados aprofundamentos matemáticos acerca do conteúdo referente aos números de Padovan, para então se construir o processo histórico-evolutivo com ênfase na generalização da SP, através dos trabalhos de Voet e Schoonjans (2012), Spinadel e Buitrago (2009), Padovan (2002) e Stewart (1996).

A partir desse processo histórico-evolutivo, foram estudados conteúdos inerentes às matrizes geradoras, à fórmula de Binet, à função geradora e às relações matriciais, nos seguintes trabalhos: Cerda-Morales (2017); Ferreira (2015); Seenukul *et al.* (2015); Tas e Karaduman (2014); Sokhuma (2013); e Yilmaz e Taskara (2013). Além desses, foi possível realizar estudos em Alves (2015; 2013), Hare, Prodinge e Shallit (2014) e Alves e Neto (2011) que discutem a generalização do modelo de Fibonacci, visto que o processo de generalização da SP não foi realizado até então. O estudo referente ao processo de complexificação foi baseado em Catarino (2018), Tasci (2018), Oliveira, Alves e Paiva (2017), Familton (2015). Com este fundamento, buscou-se investigar e dar continuidade aos trabalhos referenciados acima, para assim conseguir o processo de generalização desta sequência.

Ainda em relação ao campo epistêmico-matemático, foram exploradas a Sequência $(S_1, S_2, \dots, S_{(z-1)})$ -Z-dovan (Generalização) através de trabalhos de matemática pura, destacando Vieira, Vieira e Alves (2019d), Cerda-Morales (2017), em que este retrata a sequência matricial de Padovan, não ocorrendo a generalização. E diante dessa lacuna, esta pesquisa pretendeu estudar o processo de generalização.

Além do mais, foram estudadas as relações n -dimensionais e os números quaternários, fundamentados nos trabalhos de Vieira e Alves (2019c), Catarino (2018), Tasci (2018), Oliveira, Alves e Paiva (2017), Familton (2015).

Por fim, leituras relacionadas à ED e TSD foram realizadas para que fosse possível investigar as situações de ensino orientadas pela vertente francesa da DM, destacando os seguintes autores: Brousseau (2008; 2000; 1986; 1982; 1976); Artigue *et al.* (1995); Artigue (1988); Almouloud e Silva (2012); Almouloud e Coutinho (2008); Almouloud (2007); Alves (2016c); e Pais (2011).

Dessa forma, visando descrever o contexto didático-cognitivo em que a SP é abordada, e definir o local de aplicação desta pesquisa, analisou-se a matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

(IFCE), *campus* Fortaleza, escolhido por oferecer formação inicial para professores de Matemática. Assim, fez-se uma avaliação das ementas das disciplinas do curso para selecionar a que melhor se ajustasse à proposta desta pesquisa quanto à aplicação, definindo-se então a disciplina de História da Matemática (HM). Com isso, verificou-se que a ementa desta disciplina é obrigatória na matriz curricular e abrange os seguintes assuntos: o conceito de número e os sistemas de numeração; o processo histórico-evolutivo da Aritmética, Álgebra e Geometria; a biografia dos matemáticos que contribuíram significativamente para esse processo e a HM no Brasil.

Contudo, o estudo constatou que o conteúdo de sequências lineares recursivas é trabalhado no capítulo que discute a HM, iniciando com a SF (sequência de segunda ordem), inexistindo as sequências de terceira ordem, mais especificamente a SP, que será estudada nesta pesquisa. Ademais, pode-se perceber que, além dos livros adotados usualmente para compor os estudos acerca da disciplina (disponibilizados na biblioteca da instituição), nenhum deles apresenta a SP, podendo ser encontrado na internet por meio de artigos, jornais etc. Tal descrição do contexto permitiu descrever a problemática e a justificativa da pesquisa, que serão abordados mais adiante.

Baseado em alguns livros de HM sugeridos para estudo na referida disciplina do curso de Licenciatura em Matemática do IFCE, o estudo apresenta alguns conceitos matemáticos que aborda o conteúdo de sequências lineares e recorrentes, estudando a SF. Esta sequência tem a sua razão de convergência relacionada com o número de ouro, sendo este e o número radiante as únicas soluções dos números mórficos. Com isso, buscaram-se estudos referentes à SP, em que esta apresenta a sua razão de convergência relacionada ao número radiante, além de ser uma sequência linear e recorrente como é o caso de Fibonacci, sendo assim justificada a problemática desta pesquisa. Além disso, os números de Padovan são considerados primos dos números de Fibonacci, sendo a primeira uma sequência de terceira ordem e a última de segunda ordem. Segundo Alves (2016c), hiatos históricos são registrados no decorrer da disciplina, sendo caracterizados pelo fato de estarem presentes

em determinados traços históricos, porém, não sendo encontrados registros explicativos do estágio atual de evolução, generalização e o papel assumido matematicamente. Durante a construção desses conceitos matemáticos, alguns obstáculos podem ser gerados, sendo superados através do processo-evolutivo da SP, que, no caso desta pesquisa, se enfatiza pela generalização e complexificação da sequência.

De acordo com a revisão bibliográfica relatada anteriormente, pode-se constatar uma investigação acerca dos elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática diante de uma perspectiva histórica da SP. Em relação ao campo epistemológico, é possível compreender a existência de uma evolução dos números de Padovan, sendo direcionados a generalizações e à inserção de unidades imaginárias e variáveis. Em relação aos aspectos cognitivos, estes estão associados à aprendizagem dos conceitos matemáticos, mobilizando o pensamento intuitivo do aluno, direcionando-o a obter um raciocínio inferencial durante a resolução da situação-problema proposta em todas as suas etapas da TSD (ação, formulação e validação). No aspecto didático, destacou-se a transposição didática das definições matemáticas. Ambos os aspectos foram considerados de acordo com a proposta de uma experiência de ensino da SP no ensino superior na disciplina de HM.

A SP, até então, não era discutida na disciplina de HM, durante a licenciatura de Matemática. Apesar de ser uma sequência recorrente e linear, esta não é vista na matriz curricular do curso, e nem existem facilmente literaturas sobre este assunto, ficando a cargo do professor obter tal abordagem e aprofundar o assunto. Dessa forma, visando transformar esse conteúdo em um tópico a ser ensinado, pode-se considerar que pesquisadores educadores matemáticos estudam os “fenômenos” inerentes ao ensino de Matemática através de teorias de ensino relacionadas com a transposição didática (ALVES, 2016b).

Como este projeto é voltado para a formação continuada dos professores, e levando em consideração este contexto, destacou-se a ED em complementaridade com a TSD como meios para fundamentar a investigação da sequência.

Assim, a pesquisa foi norteadada pela questão: como desenvolver uma ED em associação com a TSD por meio de um estudo sistemático sobre o processo matemático de generalização e complexificação da SP, realizando situações didáticas que oportunizem a investigação de seus teoremas e suas propriedades, explorando ainda a sua representação matricial e complexa numa perspectiva epistemológica, em relação a sua origem e evolução histórica?

Realizou-se assim um estudo do processo de generalização e complexificação da SP, investigando-se o processo histórico e evolutivo desses números, diante de uma análise pormenorizada dos respectivos conteúdos matemáticos. A pesquisa pretendeu apresentar uma abordagem didática matemática aos professores de Matemática em formação inicial, fornecendo-lhes ferramentas necessárias para que haja uma melhoria nas práticas em sala de aula, mais especificamente na disciplina de HM.

Para superar os obstáculos e alcançar o objetivo da pesquisa com satisfação, seria necessário um modelo alternativo, apresentando novas metodologias e práticas pedagógicas, além das propostas desenvolvidas na DM como os “objetivos obstáculos” (ASTOLFI, 1994). Logo, os objetivos gerais e específicos deste trabalho visavam elencar os elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática com base nos pressupostos da ED. Com isso, apresentou-se o objetivo geral da pesquisa como sendo: descrever elementos de um estudo sistemático, com base na ED, em conjunto com a TSD das Situações Didáticas, referentes aos modelos de generalização e complexificação da SP, promovendo a compreensão histórico-evolutiva, identificação, descrição e exploração de suas propriedades.

Dessa forma, foram assim traçados os objetivos específicos:

i) investigar os teoremas e propriedades inerentes à generalização e complexificação de representações matriciais, fórmula de Binet, função geradora, sequência $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{z-1})$ -Z-dovan, relações bi, tri e n -dimensionais números quatérnios de Padovan;

ii) explorar, através de situações de ensino, as representações matriciais, a sequência (S_1, S_2) -Padovan, as relações bidimensionais e os números quaternios de Padovan; e

iii) aplicar o desenvolvimento histórico-evolutivo, ou seja, epistemológico-matemático, da SP característico ao seu processo de generalização e complexificação, através da proposição de situações-problema em sala de aula.

Com isso, dois referenciais amplamente conhecidos como metodologia de pesquisa e ensino em matemática, respectivamente ED e TSD, foram discutidos e associados, neste trabalho, à SP. Foram evidenciadas, portanto, suas relações e implicações durante a prática de ensino da integração entre essas duas teorias. Foram mostrados, além disso, o percurso metodológico e a aplicação das fases de elaboração de uma ED, sendo estas caracterizadas pela fundamentação teórica, experimentação e análises ocorridas durante o processo de implementação.



A ENGENHARIA DIDÁTICA E A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

No início do século XIX, o matemático Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941) começou a se preocupar com a formação do professor e com as condições de ensino então adotadas até aquele momento. Com isso, a partir dos anos 1880 foram criados na França centros universitários, visando melhorar o sistema de ensino, surgindo então a ED.

Esta metodologia foi criada para analisar as situações didáticas. Vale lembrar que a ED “designa um conjunto de sequências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente por um professor-engenheiro” (ARTIGUE *et al.*, 1995, p. 62). Segundo Artigue (1988), a ED é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de seu domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência. O professor tem o papel de um engenheiro, assim este deverá criar um planejamento, de acordo com cada situação, para que os alunos consigam compreender determinados conteúdos matemáticos.

Essa metodologia é dividida em quatro fases: análises preliminares; concepção e análise *a priori*; experimentação e análise *a posteriori*; e validação. Permitindo ainda organizar uma pesquisa voltada para o ensino de Matemática e estudando a relação entre a teoria e a prática, essa estrutura de ensino investiga as situações da microengenharia e macroengenharia.

Na época do surgimento da ED, Perrin-Glorian e Bellemain (2016) observaram os riscos em relação às transformações voltadas para o sistema de ensino ao se adotar esta metodologia, relatando ainda que o sistema não estava preparado para tal mudança. Com isso, nos anos 1990, o papel do professor tornou-se um objeto de estudo.

A Engenharia Didática Clássica-EDC (1ª geração) estuda e analisa o comportamento do discente, tendo um interesse maior na modela-

zação das atividades dos alunos, em seu progresso de aprendizagem e nos elementos clássicos assegurados no triângulo didático (aluno-professor-conhecimento). Alves e Catarino (2017, p. 126) afirmam:

Engenharia Didática clássica ou de 1ª geração, compreendida como uma metodologia que visa ao estudo dos fenômenos didáticos, que possam permitir os fenômenos em sala de aula, bem como uma perspectiva de ED, visando ao desenvolvimento de recursos de formação que, segundo a tradição, têm recebido a denominação de Engenharia Didática de Formação (EDF), de desenvolvimento ou Engenharia de 2ª geração.

De forma a complementar a ED em suas respectivas fases, tem-se então a utilização da TSD como teoria de ensino. Assim, a TSD é um modelo teórico, segundo o qual, considerando o ensino como projeto e ação social em que o aprendiz se apropria de um saber constituído ou em constituição, a didática da matemática se transforma numa ciência das condições de transmissão e apropriação dos conhecimentos matemáticos. Essa teoria ainda retrata que cada conhecimento pode ser determinado com base em uma certa situação. Dessa forma, essas situações permitem que o espaço de aplicação (sala de aula) seja organizado elencando os momentos de interações entre o professor, aluno e saber.

Com isso, pode-se analisar a importância de transformar o conteúdo matemático para obter uma didática com cunho mais investigativo. Para isso, uma das alternativas encontradas é abordar um determinado conteúdo com a metodologia de ED em associação com a TSD, no curso de formação inicial de professores. A seguir, serão discutidas as fases da ED e os aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos, articulando-os com as etapas dessa metodologia abordada na pesquisa.

A ED é uma metodologia de pesquisa, sendo indispensável a aplicação de suas fases para fundamentar o processo de investigação e interpretação dos dados (ALVES, 2014). Logo, na primeira etapa, é

onde realizam as análises prévias, sendo elas, segundo Almouloud e Coutinho (2008, p. 66):

[...] epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino; do ensino usual e seus efeitos; das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução; das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva; a consideração dos objetivos específicos da pesquisa; o estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho.

Pode-se ainda definir como sendo a fase que “se estrutura em torno de uma análise do funcionamento do sistema” (ARTIGUE *et al.*, 1995, p. 39). É importante determinar e selecionar os elementos que permitem o comportamento dos estudantes. Durante este processo, é necessário que o professor promova a interação do aluno, a fim de produzir conhecimento. Assim, o estudante começará a ganhar maior confiança e domínio em relação ao conteúdo visto em sala de aula.

O primeiro processo para iniciar a análise preliminar é identificar os problemas de ensino e aprendizagem de acordo com o objeto de estudo. Após essa análise, são selecionadas referências bibliográficas para aprimorar os conhecimentos acerca do tema que será investigado e estudado.

Segundo Artigue (1988), esta fase deve ser analisada de acordo com três dimensões: a epistemologia, sendo esta associada ao saber em jogo; a cognição, relacionada com as características dos discentes que serão analisados; e a didática, relacionada com as características do sistema de ensino.

A dimensão epistemológica analisa a origem do desenvolvimento matemático, diferenciando-se o saber científico do que se pretende ensinar (ALVES; MARINHO, 2017). A dimensão cognitiva faz uma análise das concepções preliminares antes de ser realizada uma aplicação da sequência didática. Já a dimensão didática aborda os elementos interligados com os elementos da dimensão epistemológica.

No contexto da epistemologia matemática, Bachelard (1996) afirma que quando um conhecimento é formado pelo esforço científico, esse pode sofrer um declínio, permitindo um bloqueio ao inverter a atividade espiritual. Com isso ocorre a presença do obstáculo epistemológico, o qual se insere quando o conhecimento não é questionado. Isso mostra que esses obstáculos exercem uma função importante em relação ao processo histórico e evolutivo do conhecimento, sendo ignorados em relação ao saber ensinado. Além disso, quando se pretende compreender tais obstáculos, é necessário que sejam levados em consideração dois processos distintos: descoberta de noções matemáticas; e conceitos matemáticos.

Oliveira (2018) enfatiza que antes de um conteúdo de Matemática ser inserido em sala de aula, ele passa por uma investigação na área da Matemática Pura. Nesse contexto, é possível apontar a existência de obstáculos epistemológicos. Isso faz com que o discente tenha uma maior aprendizagem sobre o conteúdo, visto que irá entender a parte histórica desde o princípio, não apenas através de fórmulas que poderão serem utilizadas. Isso mostra ainda que o ensino e a aprendizagem do aluno vão além das resoluções dos problemas.

Vale ressaltar que quando uma sequência é adotada de uma maneira generalizada epistemologicamente de acordo com o conteúdo matemático selecionado, deve ser demonstrada em lento processo de avanços e retrocessos (PAIS, 2011, p. 49). Contudo, o plano pedagógico deve ser bem elaborado, realizando um longo processo de investigação em torno do conteúdo matemático. Alves (2016a, p. 140 e 141) define que no plano pedagógico:

[...] vale a advertência do caráter epistemológico que reside em imprimir ao raciocínio do estudante, o caráter monossêmico e inferencial, característico das teorias formais. [...] Assim como os teoremas e as teorias fundantes, que conferem seu caráter de certeza, se mostram entrelaçadas com uma “teia epistêmica” de concepções e saberes que não são negligenciados pela Didática da Matemática.

Existem dois elementos que devem ser destacados nesta fase: estudo da organização matemática; e análise didática do objeto matemático escolhido. Para o primeiro elemento, é importante observar o surgimento da fórmula matemática abordada, entendendo a sua função atual na matemática, os obstáculos epistemológicos, entre outros aspectos. Para o segundo elemento, é interessante notarmos a importância da análise de livros de HM, tendo em vista como a fórmula é abordada, percebendo o papel da história do conteúdo que será abordado (no caso desta pesquisa, destacou-se o estudo da SP); obstáculos epistemológicos identificados pelos autores; previsão das possíveis concepções inadequadas dos alunos, entre outros pontos.

Por fim, conclui-se que, durante esta fase, o domínio do conteúdo por parte do professor e a experiência com a docência devem ser fundamentais para a elaboração das situações-problema propostas de acordo com o conteúdo matemático a ser trabalhado durante a pesquisa.

Durante a fase de Concepção e Análise *a priori*, são escolhidas as variáveis didáticas: macrodidáticas ou globais; microdidáticas ou locais. A primeira refere-se a como a engenharia se organiza como um todo; a segunda é relativa à organização apenas da fase da pesquisa. Assim, relata Almouloud e Silva (2012, p. 26):

O pesquisador, orientado pelas análises preliminares, delimita certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar, chamadas de variáveis de comando (microdidáticas ou macrodidáticas).

Havia três pontos importantes que deveriam ser considerados para a análise da pesquisa, a saber: descrição das escolhas realizadas no local e comparação com a situação didática escolhida; análise da importância da situação proposta para o aluno; e suposição dos comportamentos dos alunos, tentando demonstrar como esta fase permitiria controlá-los. Diante disso, o professor/pesquisador deveria primeiramente ter convicção das escolhas das variáveis locais, podendo

modificá-las durante o processo e, assim, construir situações-problema para serem aplicadas aos alunos, e para que houvesse o alcance do objetivo proposto.

Almouloud (2007, p. 176) destaca:

A análise *a priori* é importantíssima, pois de sua qualidade depende o sucesso da situação-problema; além disso, ela permite, ao professor, poder controlar a realização das atividades dos alunos, e, também, identificar e compreender os fatos observados. Assim, as conjecturas que vão aparecer poderão ser consideradas, e algumas poderão ser objeto de um debate científico.

As situações-problema são analisadas de acordo com a matemática e a didática. Na matemática, em cada situação, os métodos de resolução devem ser analisados. Na didática, devem ser analisadas as situações-problema propostas, se essas são pertinentes e consistentes com o conteúdo abordado e com os saberes visados e já constituídos. Diante disso, as variáveis devem ser verificadas para que não haja construção de conhecimentos incompatíveis com os alunos.

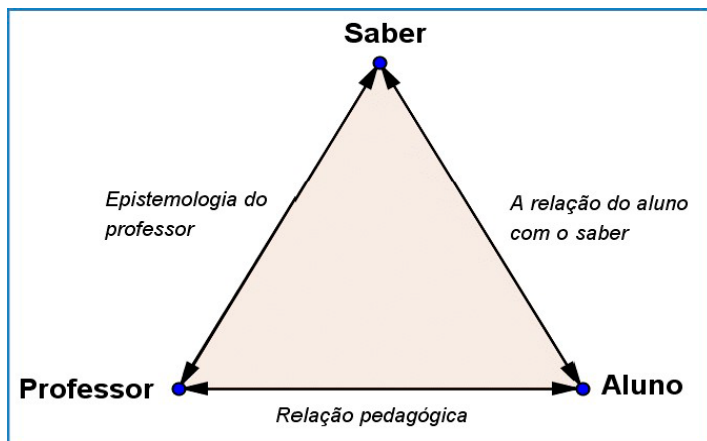
Vieira e Alves (2020) afirmam que o docente que está pesquisando deve desenvolver uma série de situações para propor aos estudantes, sendo essas do tipo de questões abertas e/ou fechadas, ressaltando o campo conceitual que pretende-se explorar. Logo, esse processo realiza o aperfeiçoamento dos participantes em determinadas aptidões, evoluindo matematicamente e didaticamente em seu conhecimento.

A TSD surgiu no início da década de 60, durante a renovação do ensino de matemática, sendo definida por Brousseau (1986) como um modelo teórico, que considera o ensino como um projeto onde o discente conquista um saber constituído ou em constituição, havendo ainda a transformação da DM numa ciência com apropriação de conhecimentos matemáticos.

Esta teoria tem como um dos objetivos primordiais da DM a caracterização de um processo de aprendizagem por meio de uma série

de situações reprodutíveis, denominadas de situações didáticas, que estabelecem os fatores determinantes para a evolução do comportamento dos alunos. Professores, alunos e meio (*milieu*¹) são indispensáveis para a relação de ensino e aprendizagem. As relações estabelecidas entre professor-aluno-saber podem ser representadas através do triângulo didático (ver Figura 1).

Figura 1 – Triângulo didático das relações entre professor-aluno-saber.



Fonte: Oliveira e Araújo (2012, p.214)

Nos vértices do triângulo existem as relações entre saber-professor, professor-aluno; e professor-saber. Vale salientar o papel do meio (*milieu*) como principal elemento durante as interações professor-aluno-saber, permitindo a evolução do conhecimento dos discentes.

Segundo Brousseau (2000, p. 11, tradução nossa):

Trata-se de construir um modelo de situações usadas para introduzir ou ensinar noções matemáticas (e criticá-las), além de imaginar outras mais apropriadas. Ao colocar os problemas desta maneira, é possível analisá-los, de modo particular o seu cálculo, juntamente com os argumentos da organização lógico-matemática do conhecimento, argumentos econômicos e ergonômicos.

1 Termo em francês, com tradução para o português como sendo meio. Utilizado para compreender o ambiente criado pelo professor.

Mas também, é possível considerar outras restrições, em particular, aquelas que podem aparecer como conclusões de obras da psicologia ou sociologia, com a condição de torná-los funcionais, ou seja, de especificar como eles intervêm efetivamente.

Esclarecendo a integração das dimensões epistemológicas, cognitivas e sociais na Educação Matemática, este modelo permite compreender as interações sociais existentes entre os discentes e docentes em sala de aula, e as condições de como o conteúdo é aprendido. Um dos seus objetivos em relação à DM é a criação de uma série de situações didáticas, estabelecendo assim fatores para a evolução do comportamento dos alunos.

Teixeira e Passos (2013, p. 158) complementam:

O objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações entre professor, aluno e saber. Algum erro cometido pelo aluno, nessa teoria, quando identificado, constitui-se como valiosa fonte de informação para a elaboração de boas questões ou para novas situações problemas que possam atender, mais claramente, os objetivos desejáveis.

As variáveis didáticas podem ser de dois tipos: situação didática e adidática. Em ambas as situações são elaboradas em forma de jogo, porém na primeira o aluno é motivado a participar do processo de aprendizagem, desenvolvendo determinada autonomia. Na outra situação, o discente possui uma estratégia básica para adquirir o conhecimento, de acordo com as regras do jogo. Na situação adidática, a estratégia pedagógica não é revelada ao aluno.

Durante essas situações na TSD, o professor deve esclarecer os elementos predominantes nas etapas didáticas de ensino, seja ela de ação, formulação, validação e institucionalização (BROUSSEAU, 1986). Assim o autor define como situação de ação:

A sequência de ‘situações de ação’ constitui o processo pelo qual o aluno elabora estratégias, ou seja, ‘ensina a si mesmo’ um método de resolver seu problema. Essa sucessão de interações entre o aluno e o meio, constitui a dialética da ação. Usamos a palavra ‘dialética’ em vez da palavra ‘interação’ porque, por um lado, o aluno é capaz de antecipar os resultados de suas escolhas e, por outro lado, suas estratégias são, de certa forma, proposições validadas ou invalidadas pela experimentação em uma espécie de diálogo com a situação (BROUSSEAU, 2002, p. 9, tradução nossa).

Nesta etapa, o aluno busca seus conhecimentos prévios, visando resolver a situação-problema apresentada, envolvendo um raciocínio de uma forma mais experimental do que teórica.

Situação de formulação é o momento em que o estudante organiza as ideias criadas na situação anterior, de modo a formular uma linguagem mais formal. Segundo Vieira, Alves e Catarino (2019d, p. 268):

Pode-se resumir que durante esta situação, os discentes irão transformar as ideias obtidas durante a situação da ação, e transformá-las em uma linguagem mais adequada, visando realizar conjecturas, teoremas e propriedades do assunto matemático.

Durante este processo uma estratégia de resolução é apresentada pelo aluno, podendo ser escrita ou oral, destacando um conhecimento mais teórico e formalizando a linguagem utilizada, uma vez que os argumentos serão validados posteriormente. Nesta fase, tem-se ainda a presença do professor ou colega.

Situação de validação, de acordo com Oliveira, Alves e Silva (2019, p. 4):

Tem-se a validação, na qual as conjecturas elaboradas são verificadas a fim refutá-las ou validá-las. Para isso, o aluno passa a apresentar uma linguagem mais teórica

e formal, fazendo uso de propriedades e métodos de demonstrações matemáticas.

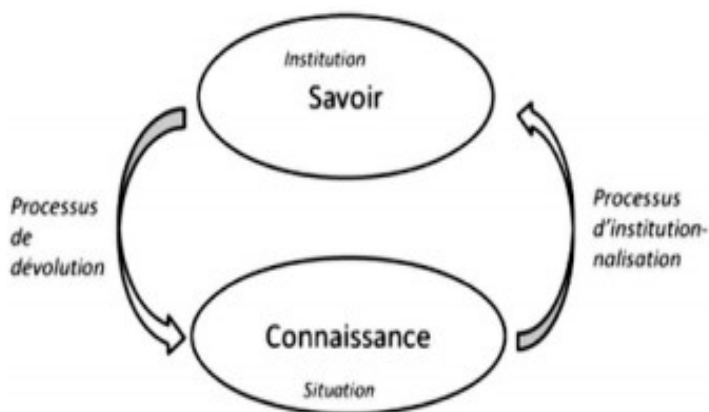
A etapa da validação é o momento em que os alunos irão demonstrar aos participantes sobre os argumentos utilizados para resolver a situação-problema proposta, havendo ainda uma apropriação de uma linguagem mais científica.

Situação de institucionalização, é o momento em que o docente retoma ao papel da atividade, discutindo as ideias dos estudantes, bem como os erros realizados durante as resoluções das atividades. Segundo Brousseau (1997, p. 235, tradução nossa):

O objetivo dos diferentes tipos de situações, cuja devolução nós abordamos, é que o próprio aluno dê sentido às peças de conhecimento que ele manipula, combinando esses diferentes componentes, dando sentido ao conhecimento adquirido.

Por fim, na última etapa, ocorre a revelação da intenção do professor aos estudantes, conferindo as resoluções que foram até então demonstradas, visando conferir as respostas. Nota-se ainda a presença do professor neste período, revelando a intenção da atividade proposta e concluindo a aplicação das quatro fases das situações da TSD. Durante as conferências das resoluções, avalia-se a transferência do conhecimento e do saber científico, que são diferenciados pelo fato de que o saber é o equilíbrio alcançado entre o estudante e o local da aplicação (MARGOLINAS, 2012). Contudo, a Figura 2 revela o momento de devolução e conhecimento como não sendo uma fase trivial durante o momento do ensino. Logo, é necessário que o professor proponha aos estudantes algumas situações didáticas de ensino, buscando os conhecimentos relacionados ao saber existente.

Figura 2 – Saber e conhecimento.



Fonte: Margolinas (2012, p.8).

Essas situações visam resgatar os conhecimentos prévios dos estudantes de uma maneira não visível, ocorrendo uma única previsão de uma intenção didática. Vale destacar que, em muitos casos, os estudantes obtêm as respostas das atividades de forma fácil, apresentando somente o conhecimento e, construindo ainda o saber. Durante o processo de aprendizagem, é necessário que ocorra a interação entre a pessoa que aprende e a pessoa que ensina, com o uso de materiais didáticos mais apropriados. Logo, ao apresentar um determinado problema aos estudantes, um dispositivo é acionado para auxiliar na resolução, seguindo as regras estabelecidas e com o viés de alcançar a trajetória correta do resultado. Assim, segundo Oliveira (2018, p.), “a TSD serve de fundamentação para a concepção e proposição das situações-problema, que irão compor uma realização didática”.

Durante a fase da experimentação, se propõe a aplicação de situações-problema de acordo com os objetivos da pesquisa e, com base na TSD, acontece a situação didática proposta pela referida teoria. Entretanto, deve haver um contrato didático (BROUSSEAU, 1982) das expectativas do docente em relação aos discentes, e deles em relação ao docente, incluindo ainda a relação do saber e a maneira como esse saber é tratado por ambos.

Almouloud e Coutinho (2008, p. 67-68) relatam que:

é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise *a priori*, em um processo de complementação. Ela é seguida de uma fase de análise *a posteriori* que se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Esses dados são, às vezes, completados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas em diversos momentos do ensino.

Esta etapa é caracterizada ainda por aplicar toda a estrutura já organizada até então, observando as situações de aprendizagem e envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática, não seguindo a dinâmica de uma aula tradicional ou comum (PAIS, 2011). Assim, de acordo com Almouloud (2007), a organização da aula neste período deve ser fundamentada na TSD e voltada para a coleta de dados dos alunos, para que possa assim analisar o ensino e a aprendizagem.

Alves *et al.* (2019) relatam que, durante a experimentação, o docente deverá colocar em prática a sequência didática elaborada na concepção e análise *a priori*, observando o momento da resolução das atividades propostas pelos estudantes, para serem então analisadas na próxima fase.

Pode-se também relatar que “nesta coleta, foi possível fazer uso de vários instrumentais, tais como relatórios, registros fotográficos, produções dos alunos, entrevistas, dentre outros recursos, a fim de formarmos o *corpus* da pesquisa” (SANTOS; ALVES, 2017). Logo, antes de coletar os dados, os alunos voluntários assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para confirmar sua livre adesão ao processo de pesquisa durante esta fase. Depois disso, os dados da coleta foram registrados e anexados para conferência e análises.

Dessa forma, realizou-se uma breve discussão referente à transposição didática e ao contrato didático, visando compreender os elementos epistemológicos, cognitivos e didáticos abordados na pesquisa, diante da perspectiva da DM.

Introduzida por Verret (1975), a transposição didática analisa a transmissão dos saberes, tornando-os acessíveis por meio de uma simplificação e busca dos conhecimentos prévios dos participantes. Com isso, tem-se que a necessidade de adaptar o conhecimento no momento em que se pretende ensinar surgiu de forma unânime, uma vez que existe uma dificuldade em transformar a teoria em prática no processo de ensino e aprendizagem, desenvolvendo assim o conceito de transposição didática.

Tal conceito foi criado para analisar o sistema didático, sendo definido no ápice da DM por Chevallard (1998, 1998, p. 39), tratando como:

Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado transposição didática.

Visando transformar o conhecimento e a experiência, necessita-se que existam três saberes: o sábio, o a ensinar e o ensinado. Segundo Melzer (2015) o saber sábio é desenvolvido a partir da pesquisa acadêmica, destinado à comunicação de processos e resultados da pesquisa. O saber a ensinar tem uma linguagem mais acessível e é dotada de artifícios pedagógicos.

Esta teoria visa analisar de forma epistemológica os objetos dos saberes, sendo eles paramatemáticos e matemáticos. Segundo Oliveira (2018, p. 35), “este último pode estudar também a si mesmo, e os objetos protomatemáticos, que apesar de não terem oficialmente a função de estudar objetos, possuem propriedades para resolver questões matemáticas”. Lopes (1999) estudou este conceito no Brasil, cha-

mando-o de mediação didática e definindo-o como o meio de alterar o conhecimento de um lugar para o outro, sem sofrer alterações.

Em relação ao contrato didático, este é considerado como uma relação em que determina a responsabilidade de cada professor e aluno, respeitando as suas respectivas regras estabelecidas durante o funcionamento dos processos de ensino e aprendizagem. Pais (2002, p. 78) afirma que o contrato didático “é uma noção apropriada para compreender o fenômeno educacional, no plano mais específico da sala de aula, embora, na realidade do cotidiano escolar, aconteçam fatos não previsíveis, dificultando a realização dos objetivos propostos”.

Vale salientar que nem sempre o contrato didático é concretizado, pois há vezes em que o discente não se interessa pela resolução das situações-problema propostas pelo docente, havendo assim uma ruptura do contrato. Portanto, na fase de experimentação, são coletados os dados dos discentes, para que, posteriormente, ocorra validação ou negação na etapa final da ED.

De acordo com Almouloud e Silva (2012), na análise *a posteriori* os dados coletados durante a experimentação devem ser analisados, devendo ser registrados através de procedimentos como: relato de observações e registros fotográficos das produções escritas; e gravações das entrevistas com os alunos.

Durante esta fase, comparam-se os resultados obtidos na experimentação com o definido na análise *a priori*, para que sejam validadas as hipóteses durante a investigação. A ED permite dois tipos de validação: externa e interna. A primeira envolve “uma descrição genérica da classe ou das condutas e tipos de produção majoritárias na classe, estudo de sua evolução e verificação de sua adequação no que concerne ao esperado dos estudantes” (LABORDE, 1997, p. 105). Na segunda, Alves (2016c, p. 697) relata que existe:

[...] uma comparação das produções dos estudantes antes ou ao longo da sequência, ou ainda após experimentação em sala, o que pode ocorrer por meio de entrevistas individuais ou em grupo, bem como por meio

de questionários. E, também, por meio da comparação de produções externas, envolvendo outros alunos não submetidos à mesma sequência estruturada de ensino.

Contudo, a pesquisa abordou uma quantidade pequena de alunos (8 discentes) num curto período de aplicação (período do curso de pós-graduação *Stricto Sensu*). As produções não foram comparadas com outras externas à pesquisa, realizando-se então a validação interna. No capítulo seguinte o campo epistêmico-matemático da pesquisa é feito, sendo apresentado aos discentes como forma de aula.

3

SEQUÊNCIAS LINEARES RECURSIVAS

Uma sequência linear recursiva é aquela em que um dado termo é calculado por meio de uma combinação linear de um ou mais termos anteriores, partindo da definição dos seus termos iniciais. Dessa forma, sequências diferentes podem ter a mesma fórmula de recorrência, porém uma mudança nos termos iniciais causa uma alteração nos demais termos da sequência (ZIERLER, 1959).

Cada sequência possui um polinômio característico, também chamado de equação característica, associado à ordem da sequência. Dessa forma, esse tipo de sequência pode ser de várias ordens. Aqui estudou-se uma sequência de ordem 3, com coeficientes constantes, cuja fórmula de recorrência é $x_{n+3} + rx_n + px_n + qx_n = 0$, em que $r, p, q \in \mathbb{R}$ e $q \neq 0$, pois caso $q = p = 0$ ou $q = 0$ e $p \neq 0$, a sequência passará a ser de primeira ou segunda ordem, respectivamente. Para cada recorrência linear de terceira ordem homogênea, com coeficientes constantes, expressa como $x_{n+3} + rx_n + px_n + qx_n = 0$, sendo associada ao polinômio de terceiro grau, $x^3 + rx^2 + px + q = 0$, denominada de polinômio ou equação característica (SILVA, 2015).

A exemplo desse estudo relacionado às sequências lineares recursivas, tem-se a sequência de Fibonacci, sendo de segunda ordem, apresentando a sua recorrência como $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$ e $F_1 = F_2 = 1$. Dessa forma, tem-se os seus primeiros termos dados por: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... O seu polinômio característico é apresentado pela equação $x^2 - x - 1 = 0$, possuindo assim soluções reais, sendo uma delas conhecida como número de ouro, cujo valor aproximado é 1,61 (OLIVEIRA, 2018).

Diante disso, percebe-se que é necessário conhecer os seus termos antecessores, porém alguns métodos matemáticos são utilizados para obter esses elementos sem que haja essa necessidade, como, por exemplo, através da sua forma matricial. Esse método consta de uma matriz geradora em que suas linhas resultam em uma base para uma transformação linear. No seu processo de construção, são então apre-

sentados os termos da sequência, incluindo os operadores e algumas propriedades (ERCOLANO, 1979).

Vieira, Alves e Catarino (2019c, p. 103) explicam que “toda matriz geradora Q possui pelo menos duas propriedades, sendo elas: calcular o próximo termo, e guardar informações relativas aos últimos termos da sequência”. Com isso, são utilizados dois operadores, denominados de principal e de deslocamento. O primeiro traduz a maneira como a sequência é calculada: fórmula de recorrência. O segundo mantém, exclui ou inclui novos termos da sequência na matriz. Assim, utiliza-se como exemplo a seguinte matriz da SP (SOKHUMA, 2013; VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019c):

$$\text{Para } Q = \begin{bmatrix} \ddot{u} & & \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tem-se: } Q^n = \begin{bmatrix} \ddot{u}_n & -1 & -2 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

Nota-se que na primeira coluna existem os coeficientes lineares dados pela fórmula de recorrência da sequência, denominada, portanto, de operador principal. Na segunda coluna, está o operador de deslocamento, sendo que, com a realização do produto da matriz Q^n por Q , apenas o termo a_{13} é levado em consideração, visto que o primeiro elemento é multiplicado pelo numeral neutro (0). Por fim, a primeira linha da matriz apresenta os termos iniciais da sequência, descritos na forma do mais atual para o mais antigo.

Visando generalizar este processo, considera-se então a sequência S , com fórmula de recorrência dada por:

$$S_n = \alpha_1 S_{n-1} + \alpha_2 S_{n-2} + \alpha_3 S_{n-3} + \dots + \alpha_n S_0.$$

em que $S_2, S_3, S_4, \dots$, são os termos da sequência e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são os coeficientes da combinação linear, com $\alpha_n \in \mathbb{R}$.

A matriz geradora Q é representada por Vieira; Alves e Catarino (2019c) da seguinte forma:

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \mathbf{\ddot{u}} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

em que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são os coeficientes da recorrência da sequência, $\mathbf{I}$ a matriz de bloco dada pela matriz identidade, $\mathbf{0}$ o vetor linha, ambos os vetores de tamanho $g-1$, em que g representa a ordem da sequência.

Diante disso, é possível estabelecer a quantidade de Matrizes Geradoras Q válidas de uma sequência linear e recorrente. A sequência deve estar disposta em alguma linha de Q^n , e, portanto, de z maneiras. Na matriz Q o operador pode estar em qualquer coluna, e os operadores de deslocamento também. Portanto a matriz Q pode ser permutada pelas linhas livremente, resultando em $z!$, em que z representa a ordem da sequência. Assim, é fácil ver que, para a SP, que é de ordem 3, existem $3! = 6$ matrizes geradoras Q válidas.

Essas matrizes são obtidas a partir da permutação das linhas de uma matriz denominada como base; logo depois são realizadas permutações das colunas, utilizando a mesma técnica de permutação das linhas anteriores. Isso garante que os elementos obtidos após o produto de Q^n serão os mesmos, porém permutados segundo a mesma regra.

Como prova desse argumento, considere uma matriz A de ordem z e outra matriz B de mesma ordem, sendo os seus elementos representados, respectivamente por $a_{i,j}$ e realizando o produto entre elas, resultando na matriz C , sendo os seus elementos representados por: $c_{i,j} = \sum_{k=1}^z a_{i,k} b_{k,j}$.

Considerando ainda a permutação das linhas e colunas v e w das matrizes A e B , tem-se uma permutação idêntica no resultado na matriz C . Isso pode ser verificado ao se analisar o comportamento da matriz resultante após a permutação dos elementos, enumerando-se nove casos, apresentados a seguir:

1. Quando $i, j \neq v, w$, tem-se que: $c_{i,j} = \sum_{k=1}^z a_{i,k} b_{k,j}$.

2. Quando $i, j = v$, tem-se que: $c_{w,w} = \sum_{k=1}^z a_{w,k} b_{k,w}$.

3. Quando $i, j = w$, tem-se que: $c_{v,v} = \sum_{k=1}^z a_{v,k} b_{k,v}$.

4. Quando $i = v, j = w$, tem-se que: $c_{w,v} = \sum_{k=1}^z a_{w,k} b_{k,v}$.

5. Quando $i = w, j = v$, tem-se que: $c_{v,w} = \sum_{k=1}^z a_{v,k} b_{k,w}$.

6. Quando $i = v, j \neq v, w$, tem-se que: $c_{w,j} = \sum_{k=1}^z a_{w,k} b_{k,j}$.

7. Quando $i = w, j \neq v, w$, tem-se que: $c_{v,j} = \sum_{k=1}^z a_{v,k} b_{k,j}$.

8. Quando $j = v, i \neq v, w$, tem-se que: $c_{i,w} = \sum_{k=1}^z a_{i,k} b_{k,w}$.

9. Quando $j = w, i \neq v, w$, tem-se que: $c_{i,v} = \sum_{k=1}^z a_{i,k} b_{k,v}$.

Note que nenhum novo elemento é adicionado à matriz resultante, sendo esses apenas permutações do produto matricial AB .





A SEQUÊNCIA DE PADOVAN

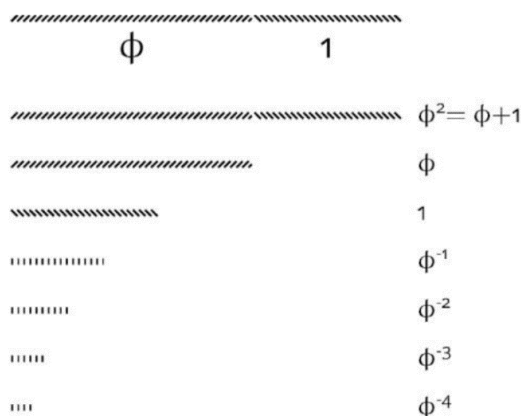
Visando à compreensão e ao entendimento adequado acerca do processo de evolução e generalização das ideias matemáticas, algumas podendo ser registradas por intermédio da percepção de exemplos, pode-se observar este processo e realizar uma discussão em torno dos números de Padovan. De acordo com Padovan (2002), a natureza pode ser considerada como algo indescritível e insondável e, a ciência e a arte são como uma espécie de abstrações que nós tentamos compreender.

Conflito que durou de 1939 a 1945, a Segunda Guerra Mundial utilizou tecnologias até então nunca vistas, tais como metralhadoras, bombas, granadas entre outras. Estas foram aperfeiçoadas para destruir milhares de vidas com um único golpe. Assim, muitas obras arquitetônicas acabaram por ser destruídas ou danificadas naquela época.

Com ênfase nesse processo histórico matemático desta sequência, destaca-se o holandês Hans Van der Laan (1904 - 1991), que abandonou o curso de arquitetura na Technische Hogeschool de Delf, decidindo consagrar a sua vida a Deus como monge beneditino. Buscou ainda pesquisar as origens primitivas da arquitetura, estabelecendo uma ligação entre a arte da construção técnica com o espaço (PADOVAN, 1994). Diante disso, ele tomou como base a basílica cristã primitiva de abadia utilizada para treinar os arquitetos durante o processo de reconstrução das igrejas que se deu após a Segunda Guerra Mundial (VOET; SCHOONJANS, 2012). Com isso, Laan e seu irmão investigaram padrões para a arquitetura com base em experimentos, utilizando pedras e, posteriormente, materiais de construção. Feito isso, deram por descoberto um novo padrão de medida, em que a sua construção é dada através de um número irracional, ideal para se trabalhar em escala geométrica e objetos espaciais (retângulos, trapézios, elipses etc.), denominando-o de número plástico. Porém, ele foi estudado primeiramente por Gérard Cordonnier, chamando-o de número radiante, cuja aplicação é mencionada na área da música, no toque de acordes, na composição de paredes, salas, entre outras.

De início, Van Der Laan estava procurando uma possível divisão de determinados segmentos, que se encontravam em uma proporção contínua, estabelecendo um problema real que ele expressou em uma de suas cartas repassadas ao arquiteto Richard Padovan (LLORCA-BOFI; MADRIGAL, 2019). Dividiu, então, um segmento em várias partes, para que os comprimentos das partes resultantes (ou a união das partes adjacentes) se encaixassem perfeitamente em uma progressão geométrica decrescente (ver Figura 3). Para que esse requisito fosse realizado, fez dois cortes e três partes, obtendo a função $f(x) = x^3 - x - 1$, possuindo apenas uma raiz real. Ao construir a progressão geométrica, os novos comprimentos foram obtidos aritmeticamente com comprimentos maiores.

Figura 3 – Divisão dos segmentos para obtenção do número plástico.



Fonte: Llorca-Bofi e Madrigal (2019)

E assim, cada novo comprimento é dado pela diferença entre o terceiro e o primeiro. Mas, surpreendentemente, é também a diferença entre o quinto e o quarto, enriquecendo assim os sistemas de medida. Com base nessas considerações, confirma-se a equação característica que obtém como a sua única solução real o número plástico.

Segundo Spinadel e Buitrago (2009, p. 163), o arquiteto Hans Van der Laan estudou sobre o número plástico posteriormente, sendo, portanto, a única solução real da equação cúbica característica da SP. Assim sendo, tem-se que as suas raízes são conhecidas como família

dos números plásticos. Uma maneira de demonstrar esse resultado, é por meio da fórmula de Cardano, onde, de acordo com a equação do tipo $x^3 + px + q = 0$, com $p, q \in \mathbb{R}$, é possível obter a raiz real $x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$. Logo, para fins de resolução da equação cúbica mencionada acima, tem-se $p = q = -1$. Substituindo na fórmula da raiz, tem-se:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-(-1)}{2} + \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-(-1)}{2} - \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}}.$$

Assim, tem-se:

$$x' = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} = 1,324717957244746025960908...$$

Tal grandeza constitui uma das soluções da equação cúbica $x^3 - x - 1 = 0$ e que representa uma das equações cúbicas que pertence à família das trinômios descritos do tipo $x^n - x - 1 = 0$, $n = 2, 3, \dots, k$, em que $k \in \mathbb{N}$. Voet e Schoonjans (2012, p. 255) comentam que “seu número plástico possui o vigor do seu próprio sistema proporcional, sendo testado e usado por arquitetos e matemáticos”.

Seja P_n a SP, $\psi \approx 1,32$ a constante plástica (SPINADEL; BUITRAGO, 2009), tem-se a seguinte propriedade:

Propriedade 1. O número plástico pode ser representado através da interação de infinitas raízes cúbicas pela expressão (FERREIRA, 2015):

$$\psi = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}}$$

Demonstração. Realizando a operação algébrica, pode-se perceber que:

$$\psi = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}} \Rightarrow \psi^3 = 1 + \psi$$

Como visto anteriormente, ψ é um número real que satisfaz a equação cúbica $x^3 - x - 1 = 0$, sendo, portanto, um número plástico. A operação realizada é possível devido ao fato de a sequência x_n com recorrência $x_{n+1} = \sqrt[3]{1+x_n}$ com $x_1 = 1$ ser convergente. Assim, sendo a sequência monótona crescente (visto que $x_1 < x_2$, já que $x_1 = 1$ e $x_2 = \sqrt[3]{1+1}$) e supondo $x_{n-1} < x_n$, tem-se $x_n^3 = 1+x_{n-1} < 1+x_n = x_{n+1}^3$ e limitada inferiormente (visto que $x_1 < \psi$ e supondo $x_n < \psi$, tem-se analogamente que $x_{n+1}^3 = 1+x_n < 1+\psi = \psi^3$), então é convergente.

Doravante, seja C_n uma nova sequência em que $c_n = \frac{P_n}{P_{n+1}}$. Assim será explorada a convergência da nova sequência $c_n = \frac{P_n}{P_{n+1}}$ com base em Vieira, Alves e Catarino (2019c), em que:

$$c_0 = \frac{P_1}{P_0} = \frac{1}{1} = 1, c_1 = \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{1} = 1, c_2 = \frac{P_3}{P_2} = \frac{2}{1} = 2, c_3 = \frac{P_4}{P_3} = \frac{2}{2} = 1.$$

Examinando a convergência de $c_n = \frac{P_n}{P_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$. Na Tabela 1, foram realizados os cálculos dos 20 primeiros termos de C_n para $n > 0$.

Tabela 1 – Valores de C_n .

n	C_n	n	C_n
1	1	11	1,3125
2	2	12	1,3333...
3	1	13	1,3214
4	1,5	14	1,3243
5	1,333...	15	1,3265
6	1,25	16	1,3230
7	1,4	17	1,3255
8	1,28	18	1,324561
9	1,333 ...	19	1,3245033
10	1,6	20	1,325

Fonte: Elaborado pelos autores

Com isso, pode-se perceber que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{P_{n+1}}{P_n} \approx \psi \approx 1,32$.

Propriedade 2. A relação entre o número plástico ψ e a nova sequência c_n é dada por:

$$c_n \approx \psi = \sqrt[3]{\ddot{u} + \sqrt[3]{\ddot{u} + \sqrt[3]{\ddot{u} + \dots}}}$$

Demonstração. Realizando a multiplicação de três termos consecutivos da nova sequência c_n , tem-se:

$$c_{n+2}c_{n+1}c_n = \frac{P_{n+3}}{P_{n+2}} \frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{P_{n+3}}{P_n}$$

$$\psi^3 = \frac{P_{n+3}}{P_n}$$

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{P_{n+3}}{P_n}}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \approx \psi$ e $\ddot{u}_n \approx \ddot{u}_{n+1} \approx \ddot{u}_{n+2}$. Assim:

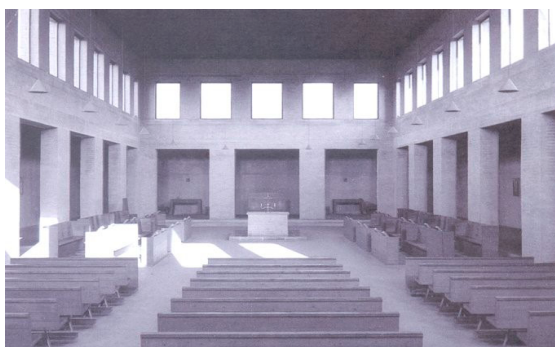
Com isso:

$$c_n \approx \psi = \sqrt[3]{\frac{P_{n+3}}{P_n}} = \sqrt[3]{\frac{P_n + P_n}{P_n}} = \sqrt[3]{1 + \frac{P_n}{P_n}} = \sqrt[3]{1 + \psi} = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}}$$

Diante da Propriedade 1, validada que a x_n é convergente, é fácil ver, através da Propriedade 2, que c_n também é convergente.

A Figura 4 mostra uma aplicação do número plástico em uma igreja, onde as suas formas foram regidas pela propriedade deste número.

Figura 4 – Igreja construída baseada no número plástico.



Fonte: Marohnic e Strmecki (2012)

Segundo Spinadel e Buitrago (2009) e Ferreira (2015) é possível mostrar que o número de ouro (relacionado à SF) e o número plástico são soluções para os números mórficos.

Definição 1. Um número real $p > 1$ é chamado de número mórfico quando existem números naturais m e n , com $m, n \in \mathbb{N}$ tais que:

$$\begin{cases} p+1 = p^m \\ p-1 = p^{-n} \end{cases}$$

Se os valores de m e n forem substituídos por 2 e 1, tem-se:

$$\begin{cases} p+1 = p^2 \\ p-1 = p^{-1} \end{cases} \Rightarrow p^2 - p - 1 = 0$$

Onde as raízes são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, que é conhecido como número de ouro. Se m e n forem substituídos por 3 e 4, obtêm-se:

$$\begin{cases} p+1 = p^3 \\ p-1 = p^{-4} \end{cases} \Rightarrow p^3 - p - 1 = 0$$

em que a solução real desta equação já foi explorada, conhecido como número plástico ou radiante.

A SP possui este nome atribuído ao arquiteto italiano Richard Padovan nascido em Pádua, Itália, em 1935 (STEWART, 1996; MANGUEIRA *et al.*, 2020). Vieira e Alves (2019a) relatam ainda que esta sequência é considerada parente de uma das sequências mais conhecidas, a SF, sendo também aritmética e de números inteiros. O matemático francês Gérard Cordonnier (1907 – 1977) desenvolveu estudos acerca destes números, porém faleceu antes de realizar a publicação de sua pesquisa, desenvolvendo o número radiante, também conhecido como número plástico. Assim, a sequência também é conhecida como Sequência de Padovan.

Padovan estudou arquitetura na Architectural Association, Londres (1952-57). Até hoje, realiza uma combinação entre a prática e o ensino durante os seus projetos de arquitetura, crendo em sua vocação direcionada à arquitetura. Iniciou estudo sobre o arquiteto holandês Dom Hans Van der Laan em 1974. Em 1999, publicou *Proportion: Science, Philosophy, Architecture*. Seu último livro, *Rumo à Universalidade: Le Corbusier, Mies e De Stijl* (2002), contrasta os grandiosos ideais filosóficos do modernismo europeu. Há indícios ainda que esta sequência também é conhecida como os números de Van der Laan.

Em relação ao matemático francês Gérard Cordonnier, cuja imagem é lembrada na Figura 5, nasceu em 7 de abril de 1907, em Bailleul (Norte), e morreu subitamente em Lhez, nos Altos Pirineus, devido a um acidente de estrada ocorrido em 12 de julho de 1977. Cordonnier foi aluno da École Polytechnique até o ano de 1928, formando-se em bacharelado em ciências no mesmo ano. Estudou na Escola Nacional de Engenharia Marítima até o ano de 1930, finalizando sua graduação no Instituto de Ótica. Salienta-se que o seu trabalho referente ao número radiante não foi finalizado devido ao seu falecimento. Assim, os seus familiares realizam buscas em seus arquivos, em gravações de seus colegas referentes ao assunto para reconstruir e publicar o seu estudo sobre esse número e o número de ouro. Cordonnier também é autor de pesquisas na área de eletrônica e matemática aplicada, tendo registrado mais de vinte patentes de invenções (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2020a).

Figura 5 – Gérard Cordonnier.



Fonte: International (2019)

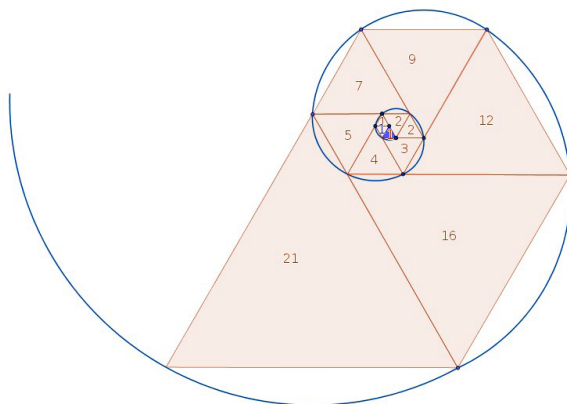
Definição 2. A SP é definida pela seguinte relação de recorrência com $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-3},$$

$n > 3$, onde P_n é o n -ésimo termo da sequência e os primeiros termos são: $u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 1$.

Vale salientar que existe uma representação geométrica da SP e essa se dá através da espiral de Padovan, conforme mostra a Figura 6, desenvolvida no *Software* Geogebra. Esta é composta pela justaposição de triângulos equiláteros, respeitando uma regra de construção característica. Considere o triângulo de lado 1 destacado em azul como o triângulo inicial. A formação da espiral se dá pela adição de um novo triângulo equilátero ao maior lado do polígono formado, inicialmente o triângulo azul. Após a adição dos demais triângulos, um novo polígono é formado, conhecido como pentágono plástico. A espiral se apresenta ao conectar com um arco duas extremidades do novo triângulo adicionado.

Figura 6 – Espiral de Padovan 2D.

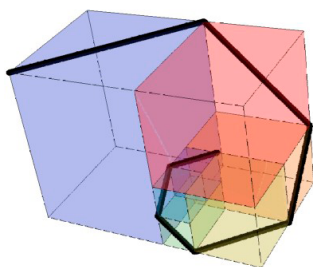


Fonte: Elaborado pelos autores

Uma réplica desta representação geométrica foi feita pelo estudante Luís Cervera Pons e pelo professor Gabriel Seguí de Vidal na cidade de Minorca, localizada no leste da Espanha, e também no oeste da Sardenha, como mostra a Figura 7b. Uma outra representação deste espiral, elaborado no *Software Wolfram* em três dimensões (3D), pode ser visualizado na Figura 7a, onde são adicionados cubos e assim traçadas retas de acordo com a diagonal externa à esta figura.

Figura 7 – Espirais de Padovan.

(a) Espiral de Padovan 3 D.



Fonte: Elaborado pelos autores

(b) Escultura do Espiral de Padovan.



Fonte: Bagur (2014)



**CAMPO EPISTÊMICO-MATEMÁTICO:
A GENERALIZAÇÃO E
COMPLEXIFICAÇÃO DA SEQUÊNCIA
DE PADOVAN**

Os estudos sobre a SP iniciaram com trabalhos de Sokhuma (2013), Seenukul *et al.* (2015), Cerda-Morales (2017), Yilmaz e Taskara (2013) e Tas e Karaduman (2014), em que realizaram pesquisas em relação às matrizes de Padovan. Assim, iniciou-se o estudo sobre o processo de generalização e complexificação desta sequência.

A partir da soma de dois, três ou quatro elementos anteriores, é possível estender os números de Padovan ao considerarmos uma quantidade maior de termos para estimar o seguinte. Alves e Neto (2011) e Alves (2015; 2013) discutem a generalização do modelo de Fibonacci para os números inteiros, tornando-se relevante estabelecer conjecturas envolvendo o aumento da quantidade de termos antecedentes, visando definir outras sequências lineares e recursivas semelhantes, como é o caso da SP.

A SP é uma sequência linear e recorrente de terceira ordem, visto que a sua fórmula de recorrência é dada por uma combinação linear de três termos, sendo o primeiro coeficiente com valor igual a zero, além de seu polinômio característico ser de terceira ordem. Ao considerar que o termo seguinte da sequência será calculado como a soma dos três antecessores, aqui denominada de sequência de Tridovan, será, portanto, de quarta ordem. De maneira semelhante, tem-se os números Tridovan (ordem 4), Tetradovan (ordem 5), Pentadovan (ordem 6), e Z-dovan (ordem z) que serão estudados neste trabalho.

Representação matricial de Padovan

Uma forma de obter qualquer elemento de uma sequência linear e recursiva é através da Matriz Geradora Q . Esta técnica foi aplicada para a SF, e, nesta seção, a mesma ideia será aplicada para os números de Padovan (FALCON; PLAZA, 2007).

A SP possui uma matriz Q de ordem 3, que, quando elevada a n -ésima potência, dá origem aos termos desta. A relação matricial foi

representada por Sokhuma (2013) e Seenukul *et al.* (2015) apresentando valores iniciais diferentes da definição para esta sequência ($\ddot{u}_i \in \mathbb{N}$, $0, 1$). Assim, visando prevalecer os valores iniciais de acordo com a definição de Padovan, tem-se que a forma matricial é expressa por:

Teorema 1. Para $Q = \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \ddot{u} \end{bmatrix}$, tem-se $Q^n = \begin{bmatrix} \ddot{u}_{i \in \mathbb{N}} & P & P \\ P_{i \in \mathbb{N}} & P & P \\ P_{i \in \mathbb{N}} & P & P \end{bmatrix}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, tem-se:

Para $n = 5$ tem-se:

$$Q^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_i & P & P \\ P_{i \in \mathbb{N}} & P & P \\ P_{i \in \mathbb{N}} & P & P \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $i = 0, 1, \dots, k$, tem-se:

$$Q^k = \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \ddot{u}_{i \in \mathbb{N}} & P & P \\ P_{i \in \mathbb{N}} & P & P \\ P_{i \in \mathbb{N}} & P & P \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} Q^{k+1} &= Q^k Q = \begin{bmatrix} P_{i \in \mathbb{N}} & P & P \\ P_{i \in \mathbb{N}} & P & P \\ P_{i \in \mathbb{N}} & P & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{k-4} & P_{k-5} + P_{k-4} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-4} + P_{k-3} & P_{k-2} \\ P_{k-2} & P_{k-3} + P_{k-2} & P_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{k-4} & P_{k-2} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-1} & P_{k-2} \\ P_{k-2} & P_k & P_{k-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Outras matrizes Q de formas diferentes, porém com propriedades semelhantes, foram obtidas (SEENUKUL *et al.*, 2015; YILMAZ; TASKARA, 2013; TAS; KARADUMAN, 2014), existindo, portanto, mais cinco matrizes Q de ordem 3, totalizando 6 matrizes válidas de Padovan. Dessa forma, prevalecendo os valores iniciais da sequência, tem-se que os seguintes teoremas:

Teorema 2. Para $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se $Q^n = \begin{bmatrix} \ddot{u}_{n-2} & P & P \\ P_{n-2} & P & P \\ P_{n-1} & P & P \end{bmatrix}$, para todo $n \geq 5$.

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, tem-se que para $n = 5$, obtêm-se:

$$Q^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3 & P_1 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \\ P_4 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}.$$

Assim a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$ tem-se que:

$$Q^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} P_{k-2} & P_{k-4} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-5} & P_{k-4} \\ P_{k-1} & P_{k-3} & P_{k-2} \end{bmatrix}.$$

Verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} Q^{k+1} &= Q^k Q^1 = \begin{bmatrix} P_{k-2} & P_{k-4} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-5} & P_{k-4} \\ P_{k-1} & P_{k-3} & P_{k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{k-3} + P_{k-4} & P_{k-3} & P_{k-2} \\ P_{k-5} + P_{k-4} & P_{k-4} & P_{k-3} \\ P_{k-3} + P_{k-2} & P_{k-2} & P_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{k-1} & P_{k-3} & P_{k-2} \\ P_{k-2} & P_{k-4} & P_{k-3} \\ P_k & P_{k-2} & P_{k-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3. Para $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-5} & P_{n-4} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-2} & P_{n-1} \\ P_{n-4} & P_{n-3} & P_{n-2} \end{bmatrix}$, para todo $n \geq 5$.

Demonstração. Assim como foi demonstrado no Teorema 2, é possível chegar facilmente à demonstração deste e dos demais teoremas explorados abaixo.

Teorema 4. Para $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-1} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-2} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-3} & P_{n-5} \end{bmatrix}$, para todo $n \geq 5$.

Teorema 5. Para $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-2} \end{bmatrix}$, para todo $n \geq 5$.

Teorema 6. Para $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-1} \\ P_{n-4} & P_{n-5} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-2} \end{bmatrix}$, para todo $n \geq 5$.

Definição 3. De modo análogo à definição da SP (Definição 2), pode-se obter a recorrência para os termos negativos desta sequência, com $n > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, resultando em:

$$P_{-n} = P_{-n+3} - P_{-n+1}.$$

Com essa relação, é possível calcular os termos com índice inteiro não positivo da SP, conforme apresenta a Tabela 2 abaixo:

Tabela 2 – Termos da SP - índice inteiro não positivo.

P_{-10}	P_{-9}	P_{-8}	P_{-7}	P_{-6}	P_{-5}	P_{-4}	P_{-3}	P_{-2}	P_{-1}	P_0
2	-1	0	1	-1	1	0	0	1	0	1

Fonte: Elaborado pelos autores

A matriz geradora da SP para os números com índice inteiro não positivo, denominada de $\tilde{n}$, é obtida através do cálculo da matriz inversa de Q , conjecturando o teorema abaixo, tomando como exemplo a matriz Q do Teorema 5.

Teorema 7. Seja $n \in \mathbb{Z}$ e $\tilde{n} = Q^{-1}$, tem-se que a matriz abaixo representa a matriz geradora para a sequência negativa de Padovan.

$$Q\tilde{n} = I$$

$$\text{Para } \tilde{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } \tilde{n}^n = \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-3} + P_{-n-4} & P_{-n-4} + P_{-n-5} & P_{-n-5} + P_{-n-6} \\ P_{-n-3} & P_{-n-4} & P_{-n-5} \end{bmatrix}, n \geq 1.$$

Demonstração. Pelo princípio da indução finita, realiza-se:

Para $n = 1$, tem-se:

$$\tilde{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{-3} & P_{-4} & P_{-5} \\ P_{-4} + P_{-5} & P_{-5} + P_{-6} & P_{-6} + P_{-7} \\ P_{-4} & P_{-5} & P_{-6} \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{Z}$, obtêm-se:

$$\tilde{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} P_{-k-2} & P_{-k-3} & P_{-k-4} \\ P_{-k-3} + P_{-k-4} & P_{-k-4} + P_{-k-5} & P_{-k-5} + P_{-k-6} \\ P_{-k-3} & P_{-k-4} & P_{-k-5} \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k + 1$, conclui-se:

$$\tilde{n}^{k+1} = \tilde{n}^k \tilde{n}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} P_{-k-2} & P_{-k-3} & P_{-k-4} \\ P_{-k-3} + P_{-k-4} & P_{-k-4} + P_{-k-5} & P_{-k-5} + P_{-k-6} \\ P_{-k-3} & P_{-k-4} & P_{-k-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{-k-3} & P_{-k-4} & P_{-k-2} - P_{-k-4} \\ P_{-k-4} + P_{-k-5} & P_{-k-5} + P_{-k-6} & P_{-k-3} + P_{-k-4} - P_{-k-5} - P_{-k-6} \\ P_{-k-4} & P_{-k-5} & P_{-k-3} - P_{-k-5} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{-k-3} & P_{-k-4} & P_{-k-5} \\ P_{-k-4} + P_{-k-5} & P_{-k-5} + P_{-k-6} & P_{-k-6} + P_{-k-7} \\ P_{-k-4} & P_{-k-5} & P_{-k-6} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

As outras matrizes geradoras ã seguem a mesma regra de forma-
ção, totalizando seis matrizes válidas de Padovan para índice inteiro
não positivo da sequência.

Representação matricial de Tridovan

Com base nos trabalhos de Vieira e Alves (2019d; 2019e), a se-
quência de Tridovan é uma extensão da SP de quarta ordem, sen-
do do tipo recorrente e linear, descrita com os seguintes termos:
1, 0, 1, 1, 2, 2, 4, 5, 8, 11, 17, ...

Definição 4. A sequência de Tridovan satisfaz a seguinte fórmula
de recorrência, para $n \in \mathbb{N}$ (VIEIRA; ALVES, 2019d; 2019e):

$$P_{3(n)} = P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)},$$

$n \geq 4$, em que $P_{3(n)}$ representa o n -ésimo termo da sequência e com
os termos iniciais $P_{3(0)} = 1, P_{3(1)} = 0, P_{3(2)} = P_{3(3)} = 1$.

Existe uma abordagem matricial para Tridovan, de maneira seme-
lhante à SP, denominada de matriz geradora Q_3 , podendo também ser
gerada através da recorrência (Definição 4).

Teorema 8. Seja $n \in \mathbb{N}$ e $Q_3(i, j)$ o termo da matriz representado por i a linha e j a coluna, tem-se Q_3 a matriz geradora Q_3 de Tridovan é dada por Vieira e Alves (2019d; 2019e):

$$\text{Para } Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } Q_3^n = \begin{bmatrix} Q_3(1,1) & Q_3(1,2) & Q_3(1,3) & Q_3(1,4) \\ Q_3(2,1) & Q_3(2,2) & Q_3(2,3) & Q_3(2,4) \\ Q_3(3,1) & Q_3(3,2) & Q_3(3,3) & Q_3(3,4) \\ Q_3(4,1) & Q_3(4,2) & Q_3(4,3) & Q_3(4,4) \end{bmatrix}, n \geq 6.$$

De forma a simplificar a visualização dos termos da matriz anterior, o cálculo de cada um destes é apresentado em cada uma das linhas a seguir:

$$\begin{aligned} Q_3(1,1) &= P_{3(n)}, Q_3(1,2) = P_{3(n-1)}, Q_3(1,3) = P_{3(n-2)}, Q_3(1,4) = P_{3(n-3)}, \\ Q_3(2,1) &= P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}, Q_3(2,2) = P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}, \\ Q_3(2,3) &= P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}, Q_3(2,4) = P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)} + P_{3(n-6)}, \\ Q_3(3,1) &= P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}, Q_3(3,2) = P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}, Q_3(3,3) = P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}, \\ Q_3(3,4) &= P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}, Q_3(4,1) = P_{3(n-1)}, Q_3(4,2) = P_{3(n-2)}, Q_3(4,3) = P_{3(n-3)}, \\ Q_3(4,4) &= P_{3(n-4)}. \end{aligned}$$

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita para provar o teorema, realiza-se:

Para $n = 6$, tem-se:

$$\begin{aligned} Q_3^6 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^6 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{3(6)} & P_{3(5)} & P_{3(4)} & P_{3(3)} \\ P_{3(5)} + P_{3(4)} + P_{3(3)} & P_{3(4)} + P_{3(3)} + P_{3(2)} & P_{3(3)} + P_{3(2)} + P_{3(1)} & P_{3(2)} + P_{3(1)} + P_{3(0)} \\ P_{3(5)} + P_{3(4)} & P_{3(4)} + P_{3(3)} & P_{3(3)} + P_{3(2)} & P_{3(2)} + P_{3(1)} \\ P_{3(5)} & P_{3(4)} & P_{3(3)} & P_{3(2)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$Q_3^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_3(1,1) & Q_3(1,2) & Q_3(1,3) & Q_3(1,4) \\ Q_3(2,1) & Q_3(2,2) & Q_3(2,3) & Q_3(2,4) \\ Q_3(3,1) & Q_3(3,2) & Q_3(3,3) & Q_3(3,4) \\ Q_3(4,1) & Q_3(4,2) & Q_3(4,3) & Q_3(4,4) \end{bmatrix} \quad \text{Sendo:}$$

$$Q_3(1,1) = P_{3(k)}, Q_3(1,2) = P_{3(k-1)}, Q_3(1,3) = P_{3(k-2)}, Q_3(1,4) = P_{3(k-3)},$$

$$Q_3(2,1) = P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)}, Q_3(2,2) = P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)},$$

$$Q_3(2,3) = P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)}, Q_3(2,4) = P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)} + P_{3(k-6)},$$

$$Q_3(3,1) = P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)},$$

$$Q_3(3,2) = P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)}, Q_3(3,3) = P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)}, Q_3(3,4) = P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)},$$

$$Q_3(4,1) = P_{3(k-1)}, Q_3(4,2) = P_{3(k-2)}, Q_3(4,3) = P_{3(k-3)}, Q_3(4,4) = P_{3(k-4)}.$$

Verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$Q_3^{k+1} = Q_3^k Q_3$$

$$Q_3^{k+1} = \begin{bmatrix} Q_3(1,1) & Q_3(1,2) & Q_3(1,3) & Q_3(1,4) \\ Q_3(2,1) & Q_3(2,2) & Q_3(2,3) & Q_3(2,4) \\ Q_3(3,1) & Q_3(3,2) & Q_3(3,3) & Q_3(3,4) \\ Q_3(4,1) & Q_3(4,2) & Q_3(4,3) & Q_3(4,4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Q'_3(1,1) & Q'_3(1,2) & Q'_3(1,3) & Q'_3(1,4) \\ Q'_3(2,1) & Q'_3(2,2) & Q'_3(2,3) & Q'_3(2,4) \\ Q'_3(3,1) & Q'_3(3,2) & Q'_3(3,3) & Q'_3(3,4) \\ Q'_3(4,1) & Q'_3(4,2) & Q'_3(4,3) & Q'_3(4,4) \end{bmatrix}.$$

Tem-se que cada elemento dessa matriz é dado por:

$$\begin{aligned}
Q'_3(1,1) &= P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} = P_{3(k+1)}, Q'_3(1,2) = P_{3(k)}, Q'_3(1,3) = P_{3(k-1)}, \\
Q'_3(1,4) &= P_{3(k-2)}, \\
Q'_3(2,1) &= P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)} + P_{3(k-6)} \\
&= P_{3(k)} + P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)}, \\
Q'_3(2,2) &= P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)}, Q'_3(2,3) = P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)}, \\
Q'_3(2,4) &= P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)}, \\
Q'_3(3,1) &= P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)} = P_{3(k)} + P_{3(k-1)}, \\
Q'_3(3,2) &= P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)}, Q'_3(3,3) = P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)}, Q'_3(3,4) = P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)}, \\
Q'_3(4,1) &= P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} = P_{3(k)}, Q'_3(4,2) = P_{3(k-1)}, Q'_3(4,3) = P_{3(k-2)}, \\
Q'_3(4,4) &= P_{3(k-3)}.
\end{aligned}$$

Como os termos da sequência de Tridovan são de ordem 4 (três elementos que compõem a fórmula de recorrência, mais um elemento com coeficiente igual a zero), pode-se verificar a quantidade de matrizes geradoras Q válidas, através da permutação de suas linhas e posteriormente das suas colunas, de acordo com as linhas que foram permutadas, resultando em $P_4 = 4! = 24$. Além dessa matriz estudada, existem mais vinte e três matrizes válidas 4×4 (de ordem 4), totalizando vinte e quatro matrizes geradoras Q_3 de Tridovan. Cada uma dessas matrizes Q_3 e sua n -ésima potência pode ser demonstrada de maneira semelhante à apresentada anteriormente.

Baseado no mesmo princípio utilizado para compor a fórmula de recorrência da SP para índices inteiros não positivos, pode-se obter a composição da recorrência da sequência de Tridovan.

Definição 5. Com $n > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, tem-se a fórmula de recorrência da sequência de Tridovan:

$$P_{3(-n)} = P_{3(-n+4)} - P_{3(-n+2)} - P_{3(-n+1)}.$$

Assim, é possível calcular os termos com índice inteiro não positivo de Tridovan, de acordo com a Tabela 3 abaixo:

Tabela 3 – Termos da sequência de Tridovan - índice inteiro não positivo.

$P_{3(-10)}$	$P_{3(-9)}$	$P_{3(-8)}$	$P_{3(-7)}$	$P_{3(-6)}$	$P_{3(-5)}$	$P_{3(-4)}$	$P_{3(-3)}$	$P_{3(-2)}$	$P_{3(-1)}$	$P_{3(0)}$
2	-2	0	1	0	-1	1	0	0	0	1

Fonte: Elaborada pelos autores

Com índice inteiro não positivo, a sequência de Tridovan, a forma matricial desses números é nomeada por $\tilde{n}_3$, obtida através do cálculo da matriz inversa de Q_3 (Teorema 8).

Teorema 9. Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\tilde{n}_3(i, j)$ o termo da matriz $\tilde{n}_3$ representado por i a linha e j a coluna, tem-se $\tilde{n}_3$ a matriz geradora para os termos de Tridovan com índice inteiro não positivo, onde $\tilde{n}_3 = Q_3^{-1}$, tem-se que:

$$Q_3 \tilde{n}_3 = I$$

$$\text{Para } \tilde{n}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } \tilde{n}_3^n = \begin{bmatrix} \tilde{n}_3(1,1) & Q_3(1,2) & Q_3(1,3) & Q_3(1,4) \\ \tilde{n}_3(2,1) & \tilde{n}_3(2,2) & \tilde{n}_3(2,3) & \tilde{n}_3(2,4) \\ \tilde{n}_3(3,1) & \tilde{n}_3(3,2) & \tilde{n}_3(3,3) & \tilde{n}_3(3,4) \\ \tilde{n}_3(4,1) & \tilde{n}_3(4,2) & \tilde{n}_3(4,3) & \tilde{n}_3(4,4) \end{bmatrix}, n \geq 1.$$

Simplificando a visualização da matriz, os termos são dispostos em cada linha:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_3(1,1) &= P_{3(-n)}, \quad \tilde{n}_3(1,2) = P_{3(-n-1)}, \quad \tilde{n}_3(1,3) = P_{3(-n-2)}, \quad \tilde{n}_3(1,4) = P_{3(-n-3)}, \\ \tilde{n}_3(2,1) &= P_{3(-n-1)} + P_{3(-n-2)} + P_{3(-n-3)}, \quad \tilde{n}_3(2,2) = P_{3(-n-2)} + P_{3(-n-3)} + P_{3(-n-4)}, \\ \tilde{n}_3(2,3) &= P_{3(-n-3)} + P_{3(-n-4)} + P_{3(-n-5)}, \quad \tilde{n}_3(2,4) = P_{3(-n-4)} + P_{3(-n-5)} + P_{3(-n-6)}, \\ \tilde{n}_3(3,1) &= P_{3(-n-1)} + P_{3(-n-2)}, \quad \tilde{n}_3(3,2) = P_{3(-n-2)} + P_{3(-n-3)}, \\ \tilde{n}_3(3,3) &= P_{3(-n-3)} + P_{3(-n-4)}, \quad \tilde{n}_3(3,4) = P_{3(-n-4)} + P_{3(-n-5)}, \\ \tilde{n}_3(4,1) &= P_{3(-n-1)}, \quad \tilde{n}_3(4,2) = P_{3(-n-2)}, \quad \tilde{n}_3(4,3) = P_{3(-n-3)}, \quad \tilde{n}_3(4,4) = P_{3(-n-4)}. \end{aligned}$$

Demonstração. A demonstração pode ser realizada utilizando o princípio da indução finita, conforme feito na demonstração do Teorema 7.

As demais matrizes geradoras $\tilde{n}_3$ utilizam a mesma regra de formação, compondo 24 matrizes válidas de Tridovan com índice inteiro não positivo da sequência.

Representação matricial de Tetradovan

A sequência de Tetradovan é uma outra extensão da SP, definida por Vieira e Alves (2019d) como sendo uma sequência de quinta ordem, descrevendo os seus dez primeiros elementos como: 1, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 7, 10, 16, ...

Definição 6. A sequência de Tetradovan satisfaz a seguinte fórmula de recorrência, com $n \in \mathbb{N}$:

$$P_{4(n)} = P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)},$$

$n \geq 5$, em que $P_{4(n)}$ representa o n -ésimo termo da sequência e com os valores iniciais $P_{4(0)} = 1, P_{4(1)} = 0, P_{4(2)} = P_{4(3)} = 1, P_{4(4)} = 2$.

Qualquer termo da sequência de Tetradovan pode ser obtido através do cálculo da n -ésima potência de Q , gerado a partir da matriz geradora.

Teorema 10. Seja $n \in \mathbb{N}$, e $Q_4(i, j)$ o termo da matriz Q_4 representado por i a linha e j a coluna, tem-se a matriz geradora de Tetradovan, Q_4 dada por (VIEIRA; ALVES, 2019d)

$$\text{Para } Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tem-se}$$

$$Q_4^n = \begin{bmatrix} Q_4(1,1) & Q_4(1,2) & Q_4(1,3) & Q_4(1,4) & Q_4(1,5) \\ Q_4(2,1) & Q_4(2,2) & Q_4(2,3) & Q_4(2,4) & Q_4(2,5) \\ Q_4(3,1) & Q_4(3,2) & Q_4(3,3) & Q_4(3,4) & Q_4(3,5) \\ Q_4(4,1) & Q_4(4,2) & Q_4(4,3) & Q_4(4,4) & Q_4(4,5) \\ Q_4(5,1) & Q_4(5,2) & Q_4(5,3) & Q_4(5,4) & Q_4(5,5) \end{bmatrix},$$

n . 8 e onde cada termo da matriz anterior é dado por:

$$\begin{aligned} Q_4(1,1) &= P_{4(n)}, Q_4(1,2) = P_{4(n-1)}, Q_4(1,3) = P_{4(n-2)}, Q_4(1,4) = P_{4(n-3)}, Q_4(1,5) = P_{4(n-4)}, \\ Q_4(2,1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, Q_4(2,2) = P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, \\ Q_4(2,3) &= P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, Q_4(2,4) = P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)}, \\ Q_4(2,5) &= P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)} + P_{4(n-8)}, Q_4(3,1) = P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}, \\ Q_4(3,2) &= P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, Q_4(3,3) = P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, \\ Q_4(3,4) &= P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, Q_4(3,5) = P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)}, \\ Q_4(4,1) &= P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)}, Q_4(4,2) = P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}, Q_4(4,3) = P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}, \\ Q_4(4,4) &= P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}, Q_4(4,5) = P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}, \\ Q_4(5,1) &= P_{4(n-1)}, Q_4(5,2) = P_{4(n-2)}, Q_4(5,3) = P_{4(n-3)}, Q_4(5,4) = P_{4(n-4)}, Q_4(5,5) = P_{4(n-5)}. \end{aligned}$$

Demonstração. Pode provar pelo princípio da indução finita a corretude do teorema, assim tem-se que:

Para $n = 8$, tem-se:

$$\begin{aligned} Q_4^8 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^8 = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 4 & 3 & 2 \\ 16 & 10 & 7 & 4 & 3 \\ 14 & 9 & 6 & 4 & 2 \\ 11 & 7 & 5 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q_4(1,1) & Q_4(1,2) & Q_4(1,3) & Q_4(1,4) & Q_4(1,5) \\ Q_4(2,1) & Q_4(2,2) & Q_4(2,3) & Q_4(2,4) & Q_4(2,5) \\ Q_4(3,1) & Q_4(3,2) & Q_4(3,3) & Q_4(3,4) & Q_4(3,5) \\ Q_4(4,1) & Q_4(4,2) & Q_4(4,3) & Q_4(4,4) & Q_4(4,5) \\ Q_4(5,1) & Q_4(5,2) & Q_4(5,3) & Q_4(5,4) & Q_4(5,5) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Em que cada elemento é dado por:

$$\begin{aligned}
Q_4(1,1) &= P_{4(8)}, Q_4(1,2) = P_{4(7)}, Q_4(1,3) = P_{4(6)}, Q_4(1,4) = P_{4(5)}, Q_4(1,5) = P_{4(4)}, \\
Q_4(2,1) &= P_{4(7)} + P_{4(6)} + P_{4(5)} + P_{4(4)}, Q_4(2,2) = P_{4(6)} + P_{4(5)} + P_{4(4)} + P_{4(3)}, \\
Q_4(2,3) &= P_{4(5)} + P_{4(4)} + P_{4(3)} + P_{4(2)}, Q_4(2,4) = P_{4(4)} + P_{4(3)} + P_{4(2)} + P_{4(1)}, \\
Q_4(2,5) &= P_{4(3)} + P_{4(2)} + P_{4(1)} + P_{4(0)}, Q_4(3,1) = P_{4(7)} + P_{4(6)} + P_{4(5)}, \\
Q_4(3,2) &= P_{4(6)} + P_{4(5)} + P_{4(4)}, Q_4(3,3) = P_{4(5)} + P_{4(4)} + P_{4(3)}, \\
Q_4(3,4) &= P_{4(4)} + P_{4(3)} + P_{4(2)}, Q_4(3,5) = P_{4(3)} + P_{4(2)} + P_{4(1)}, \\
Q_4(4,1) &= P_{4(7)} + P_{4(6)}, Q_4(4,2) = P_{4(6)} + P_{4(5)}, Q_4(4,3) = P_{4(5)} + P_{4(4)}, \\
Q_4(4,4) &= P_{4(4)} + P_{4(3)}, Q_4(4,5) = P_{4(3)} + P_{4(2)}, \\
Q_4(5,1) &= P_{4(7)}, Q_4(5,2) = P_{4(6)}, Q_4(5,3) = P_{4(5)}, Q_4(5,4) = P_{4(4)}, Q_4(5,5) = P_{4(3)}.
\end{aligned}$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$Q_4^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_4(1,1) & Q_4(1,2) & Q_4(1,3) & Q_4(1,4) & Q_4(1,5) \\ Q_4(2,1) & Q_4(2,2) & Q_4(2,3) & Q_4(2,4) & Q_4(2,5) \\ Q_4(3,1) & Q_4(3,2) & Q_4(3,3) & Q_4(3,4) & Q_4(3,5) \\ Q_4(4,1) & Q_4(4,2) & Q_4(4,3) & Q_4(4,4) & Q_4(4,5) \\ Q_4(5,1) & Q_4(5,2) & Q_4(5,3) & Q_4(5,4) & Q_4(5,5) \end{bmatrix}.$$

Em que cada elemento é descrito por:

$$\begin{aligned}
Q_4(1,1) &= P_{4(k)}, Q_4(1,2) = P_{4(k-1)}, Q_4(1,3) = P_{4(k-2)}, Q_4(1,4) = P_{4(k-3)}, Q_4(1,5) = P_{4(k-4)}, \\
Q_4(2,1) &= P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)}, Q_4(2,2) = P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)}, \\
Q_4(2,3) &= P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)}, Q_4(2,4) = P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)}, \\
Q_4(2,5) &= P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)} + P_{4(k-8)}, Q_4(3,1) = P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)}, \\
Q_4(3,2) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)}, Q_4(3,3) = P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)}, \\
Q_4(3,4) &= P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)}, Q_4(3,5) = P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)}, \\
Q_4(4,1) &= P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)}, Q_4(4,2) = P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)}, Q_4(4,3) = P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)}, \\
Q_4(4,4) &= P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)}, Q_4(4,5) = P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)}, \\
Q_4(5,1) &= P_{4(k-1)}, Q_4(5,2) = P_{4(k-2)}, Q_4(5,3) = P_{4(k-3)}, Q_4(5,4) = P_{4(k-4)}, Q_4(5,5) = P_{4(k-5)}.
\end{aligned}$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$Q_4^{k+1} = Q_4^k Q_4 = \begin{bmatrix} Q_4(1,1) & Q_4(1,2) & Q_4(1,3) & Q_4(1,4) & Q_4(1,5) \\ Q_4(2,1) & Q_4(2,2) & Q_4(2,3) & Q_4(2,4) & Q_4(2,5) \\ Q_4(3,1) & Q_4(3,2) & Q_4(3,3) & Q_4(3,4) & Q_4(3,5) \\ Q_4(4,1) & Q_4(4,2) & Q_4(4,3) & Q_4(4,4) & Q_4(4,5) \\ Q_4(5,1) & Q_4(5,2) & Q_4(5,3) & Q_4(5,4) & Q_4(5,5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Q'_4(1,1) & Q'_4(1,2) & Q'_4(1,3) & Q'_4(1,4) & Q'_4(1,5) \\ Q'_4(2,1) & Q'_4(2,2) & Q'_4(2,3) & Q'_4(2,4) & Q'_4(2,5) \\ Q'_4(3,1) & Q'_4(3,2) & Q'_4(3,3) & Q'_4(3,4) & Q'_4(3,5) \\ Q'_4(4,1) & Q'_4(4,2) & Q'_4(4,3) & Q'_4(4,4) & Q'_4(4,5) \\ Q'_4(5,1) & Q'_4(5,2) & Q'_4(5,3) & Q'_4(5,4) & Q'_4(5,5) \end{bmatrix}.$$

Para fins de facilitar a visualização, tem-se que cada elemento desta matriz é dado por:

$$\begin{aligned}
Q'_4(1,1) &= P_{4(k+1)}, Q'_4(1,2) = P_{4(k)}, Q'_4(1,3) = P_{4(k-1)}, Q'_4(1,4) = P_{4(k-2)}, Q'_4(1,5) = P_{4(k-3)}, \\
Q'_4(2,1) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)} + P_{4(k-8)} \\
&+ P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)} + P_{4(k-8)} \\
&= P_{4(k)} + P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)}, \\
Q'_4(2,2) &= P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)}, Q'_4(2,3) = P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)}, \\
Q'_4(2,4) &= P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)}, Q'_4(2,5) = P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)}, \\
Q'_4(3,1) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} \\
&+ P_{4(k-6)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)} \\
&= P_{4(k)} + P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)}, \\
Q'_4(3,2) &= P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} Q'_4(3,3) = P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} Q'_4(3,4) = P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} Q'_4(3,5) = P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} \\
Q'_4(4,1) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} = P_{4(k)} + P_{4(k-1)}, \\
Q'_4(4,2) &= P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)}, Q'_4(4,3) = P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)}, Q'_4(4,4) = P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)}, Q'_4(4,5) = P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)}, \\
Q'_4(5,1) &= P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} = P_{4(k)}, Q'_4(5,2) = P_{4(k-1)}, Q'_4(5,3) = P_{4(k-2)}, Q'_4(5,4) = P_{4(k-3)}, Q'_4(5,5) = P_{4(k-4)}
\end{aligned}$$

O comportamento com índice inteiro não positivo da sequência de Tetradovan é definido a partir da recorrência $P_{4(n+5)} = P_{4(n+3)} + P_{4(n+2)} + P_{4(n+1)} + P_{4(n)}$, assim tem-se a definição abaixo.

Definição 7. A fórmula de recorrência de Tetradovan com índice inteiro não positivo, com $n > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$:

$$P_{4(-n)} = P_{4(-n+5)} - P_{4(-n+3)} - P_{4(-n+2)} - P_{4(-n+1)}.$$

Alguns termos com índice inteiro não positivo de Tetradovan são apresentados abaixo (Tabela 4).

Tabela 4 – Termos da sequência de Tetradovan - índice inteiro não positivo.

$P_{4(-10)}$	$P_{4(-9)}$	$P_{4(-8)}$	$P_{4(-7)}$	$P_{4(-6)}$	$P_{4(-5)}$	$P_{4(-4)}$	$P_{4(-3)}$	$P_{4(-2)}$	$P_{4(-1)}$	$P_{4(0)}$
0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	1

Fonte: Elaborado pelos autores

Os termos com índice inteiro não positivo da sequência de Tetradovan podem ser obtidos a partir da matriz geradora chamada de $\tilde{n}_4$.

Teorema 11. Seja $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$ e $\tilde{n}_4(i, j)$ o termo da matriz $\tilde{n}_4$ representado por i a linha e j a coluna, tem-se $\tilde{n}_4$ a matriz geradora para os termos de Tetradovan com índice inteiro não positivo, calculada a partir da matriz inversa de Q_4 (ver Teorema 10), tem-se que:

$$\text{Para , } \tilde{n}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ tem-se:}$$

$$\tilde{n}_4^n = \begin{bmatrix} \tilde{n}_4(1,1) & \tilde{n}_4(1,2) & \tilde{n}_4(1,3) & \tilde{n}_4(1,4) & \tilde{n}_4(1,5) \\ \tilde{n}_4(2,1) & \tilde{n}_4(2,2) & \tilde{n}_4(2,3) & \tilde{n}_4(2,4) & \tilde{n}_4(2,5) \\ \tilde{n}_4(3,1) & \tilde{n}_4(3,2) & \tilde{n}_4(3,3) & \tilde{n}_4(3,4) & \tilde{n}_4(3,5) \\ \tilde{n}_4(4,1) & \tilde{n}_4(4,2) & \tilde{n}_4(4,3) & \tilde{n}_4(4,4) & \tilde{n}_4(4,5) \\ \tilde{n}_4(5,1) & \tilde{n}_4(5,2) & \tilde{n}_4(5,3) & \tilde{n}_4(5,4) & \tilde{n}_4(5,5) \end{bmatrix}.$$

Para melhor visualizar a matriz, os termos são apresentados em cada linha:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_4(1,1) &= P_{4(-n)}, \tilde{n}_4(1,2) = P_{4(-n-1)}, \tilde{n}_4(1,3) = P_{4(-n-2)}, \tilde{n}_4(1,4) = P_{4(-n-3)}, \tilde{n}_4(1,5) = P_{4(-n-4)}, \\ \tilde{n}_4(2,1) &= P_{4(-n-1)} + P_{4(-n-2)} + P_{4(-n-3)} + P_{4(-n-4)}, \\ \tilde{n}_4(2,2) &= P_{4(-n-2)} + P_{4(-n-3)} + P_{4(-n-4)} + P_{4(-n-5)}, \\ \tilde{n}_4(2,3) &= P_{4(-n-3)} + P_{4(-n-4)} + P_{4(-n-5)} + P_{4(-n-6)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{n}_4(2,4) &= P_{4(-n-4)} + P_{4(-n-5)} + P_{4(-n-6)} + P_{4(-n-7)}, \\
\tilde{n}_4(2,5) &= P_{4(-n-5)} + P_{4(-n-6)} + P_{4(-n-7)} + P_{4(-n-8)}, \\
\tilde{n}_4(3,1) &= P_{4(-n-1)} + P_{4(-n-2)} + P_{4(-n-3)}, \quad \tilde{n}_4(3,2) = P_{4(-n-2)} + P_{4(-n-3)} + P_{4(-n-4)}, \\
\tilde{n}_4(3,3) &= P_{4(-n-3)} + P_{4(-n-4)} + P_{4(-n-5)}, \quad \tilde{n}_4(3,4) = P_{4(-n-4)} + P_{4(-n-5)} + P_{4(-n-6)}, \\
\tilde{n}_4(3,5) &= P_{4(-n-5)} + P_{4(-n-6)} + P_{4(-n-7)}, \\
\tilde{n}_4(4,1) &= P_{4(-n-1)} + P_{4(-n-2)}, \quad \tilde{n}_4(4,2) = P_{4(-n-2)} + P_{4(-n-3)}, \\
\tilde{n}_4(4,3) &= P_{4(-n-3)} + P_{4(-n-4)}, \quad \tilde{n}_4(4,4) = P_{4(-n-4)} + P_{4(-n-5)}, \quad \tilde{n}_4(4,5) = P_{4(-n-5)} + P_{4(-n-6)}, \\
\tilde{n}_4(5,1) &= P_{4(-n-1)}, \quad \tilde{n}_4(5,2) = P_{4(-n-2)}, \quad \tilde{n}_4(5,3) = P_{4(-n-3)}, \quad \tilde{n}_4(5,4) = P_{4(-n-4)}, \quad \tilde{n}_4(5,5) = P_{4(-n-5)}.
\end{aligned}$$

Demonstração. A demonstração pode ser realizada utilizando-se o princípio da indução finita, conforme feito na demonstração do Teorema 7.

Seguindo o princípio matemático abordado para os termos da SP e Tridovan, bem como a sua obtenção a partir da permutação das linhas, pode-se concluir que ao todo serão 120 matrizes geradoras $\mathcal{Q}$ de Tetradovan válidas ($P_5 = 5! = 120$) de ordem 5. A mesma quantidade é válida para as matrizes com índice inteiro não positivo da sequência. As demais matrizes podem ser obtidas através de transformações lineares, de maneira semelhante como ocorre para os números positivos da sequência.

De acordo com os teoremas e demonstrações apresentados anteriormente, é possível seguir o mesmo raciocínio e assim obter a generalização da extensão desta sequência.

Representação matricial de Z-Dovan

Observando as matrizes das sequências anteriores, pode-se constatar que, para uma extensão de ordem z , denominada neste presente trabalho de Z-dovan, $Z = z - 1$.

Definição 8. A sequência de Z-dovan satisfaz a seguinte fórmula de recorrência:

$$P_{Z(n+z)} = \sum_{i=0}^{z-2} P_{Z(n+i)},$$

$n \leq z, n \in \mathbb{Z}$, em que $P_{Z(n)}$ representa o n -ésimo da sequência.

Definição 9. Por sua vez, a matriz geradora Q_Z de Z-dovan, com $n \leq 2z-2$ e $n \in \mathbb{Z}$, é obtida por:

Para $Q_Z = \begin{bmatrix} 0 & [I] \\ 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_Z^n = \begin{bmatrix} P_{Z(n)} & \cdots & P_{Z(n-j+1)} & \cdots & P_{Z(n-z+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(n-i)} & \cdots & \sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(n-i-j+1)} & \cdots & \sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(n-i-z+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{Z(n-1)} & \cdots & P_{Z(n-j)} & \cdots & P_{Z(n-z)} \end{bmatrix}.$$

Onde $\mathbf{1}$ é o vetor coluna e $\mathbf{0}$ o vetor linha, onde ambos apresentam tamanho $z-1$, $[I]$ a matriz de bloco dada pela matriz identidade de ordem $z-1$ e z a ordem da sequência.

Sendo i a linha e j a coluna. Logo para $i \in \{1, \dots, z\}$ e $j \in \{1, \dots, z\}$, tem-se que:

$$Q_Z^n = \begin{bmatrix} P_{Z(n)} & P_{Z(n-j+1)} \\ \sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(n-i)} & \sum_{i=1}^{z-i+1} P_{Z(n-i-j+1)} \end{bmatrix}.$$

Vale salientar que o tamanho da matriz está relacionado com a ordem da sequência, sendo assim, observa-se que, para a matriz geradora de Padovan, tem-se uma matriz 3x3; para Tridovan uma matriz 4x4; até a Z-dovan como sendo $z \times z$.

A SP é um caso particular da sequência Z-dovan, tanto para os números positivos quanto para os números negativos, pois a sequência

possui os seus termos iniciais definidos como $P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = 1$. Assim, é possível encontrar os termos da sequência estendida generalizada de Padovan sem recursividade.

As matrizes geradoras Q válidas da sequência generalizada de Padovan serão obtidas através da permutação das linhas da matriz geradora base, e posteriormente da permutação das colunas, utilizando a mesma regra de permutação das linhas. A definição abaixo também é válida para os números com índices inteiros não positivos.

Definição 10. Sendo $m = \mathbb{Z}$, e z a ordem da generalização da sequência, a quantidade de matrizes geradoras Q válidas para a sequência generalizada é dada por:

$$Pm = m!$$

De acordo com o comportamento com índice inteiro não positivo das sequências anteriores, é possível realizar a definição abaixo como sendo a fórmula de recorrência generalizada de Z-dovan com índice inteiro não positivo, obtida a partir da fórmula de recorrência generalizada (ver Definição 8).

Definição 11. A fórmula de recorrência generalizada de Padovan com índice inteiro não positivo, com $n > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, é dada por:

$$P_{Z(-n)} = P_{Z(-n+z+1)} + \sum_{i=0}^{z-1} P_{Z(-n+1)}.$$

Com base na construção das matrizes geradoras válidas das sequências anteriores, pode-se generalizar a matriz geradora de Z-dovan, denominada de $\tilde{n}_z$.

Definição 12. A matriz geradora de Z-dovan (Generalização), com $n..2z-2$ e $n \in \mathbb{Z}$:

$$\text{Para , tem-se } \tilde{n}_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ & (-1) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_Z^n = \begin{bmatrix} P_{Z(-n)} & \cdots & P_{Z(-n-j+1)} & \cdots & P_{Z(-n-z+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{z-j+1} P_{Z(-n-i)} & \cdots & \sum_{i=1}^{z-j+1} P_{Z(-n-j+1)} & \cdots & \sum_{i=1}^{z-j+1} P_{Z(-n-z+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{Z(-n-1)} & \cdots & P_{Z(-n-j)} & \cdots & P_{Z(-n-z)} \end{bmatrix}.$$

Em que $\mathbf{0}$ representa o vetor linha de tamanho $z-1$, $(-\mathbf{1})$ representa o vetor coluna de tamanho $z-2$, e $\mathbf{I}$ a matriz de bloco dada pela matriz identidade de tamanho $z-1$.

A fórmula de Binet e a função geradora de Padovan

Abraham de Moivre (1667-1764) conseguiu escrever uma fórmula a partir da qual é possível determinar qualquer termo de uma sequência sem usar a recursividade. Porém, tal investigação matemática homenageou Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856), que foi chamada de Fórmula de Binet. Assim, para uma sequência recorrente, é possível encontrar não positivo termo desta sem necessitar conhecer os anteriores, sabendo apenas da posição do termo na sequência.

Para que seja possível encontrar tal fórmula, é necessário conhecer o polinômio característico da sequência.

Teorema 12. Para os números de Padovan, o polinômio característico é dado por:

$$x^3 - x - 1 = 0 \quad (1.1)$$

Demonstração. Com base no Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que o polinômio característico de Padovan é dado por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - Q),$$

$$\text{com } \lambda \in \mathbb{C} \text{ ou } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ e } Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 - \lambda - 1.$$

Então: $p(\lambda) = 0$, tem-se: $\lambda^3 - \lambda - 1 = 0$. Logo: $x^3 - x - 1 = 0$.

As suas raízes são dadas por uma real e duas complexas, sendo elas:

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}$$

$$x_2, x_3 = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \left(-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx -0,662359 \pm 0,56228i.$$

A única raiz real encontrada a partir da equação $x^3 - x - 1 = 0$, é conhecida como número plástico, em que representa a razão de convergência entre os números vizinhos desta sequência (AARTS; FOK-KINK; KRUIJTZER, 2001).

Teorema 13. A fórmula de Binet da SP, é dada por:

$$P_{(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n,$$

em que $n \in \mathbb{N}$, x_1, x_2 e x_3 são as raízes do polinômio característico e os coeficientes são:

$$A = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, B = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, C = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Demonstração. Sabe-se que a relação de recorrência da SP é conhecida por $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ e $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, possuindo equação característica $x^3 - x - 1 = 0$ com raízes x_1, x_2, x_3 . Com isso, $P_{(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n$. Para determinar os coeficientes A, B, C da função, utilizam-se as condições iniciais $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ e, a partir daí, obtêm-se o sistema:

$$\begin{cases} A + B + C & = 1 \\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 & = 1 \\ Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 & = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$A = \frac{-x_2 + x_2x_3 - x_3 + 1}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3} = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)},$$

$$B = \frac{-x_1 + x_1x_3 - x_3 + 1}{x_2^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3} = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)},$$

$$C = \frac{-x_1 + x_1x_2 - x_2 + 1}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3} = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Ressalta-se que a fórmula de Binet pode ser obtida por meio do método de BenTaherRachidi, estudado nos trabalhos de Sá e Spreafico (2020) e Taher e Rachidi (2016).

A função geradora permite a resolução de recorrências lineares com coeficientes constantes (KOSHY, 2001; SOYKAN, 2020). Tal procedimento demonstrou como encontrar os números de Fibonacci, sem ser necessário calcular todos os números que o precedem.

Teorema 14. A função geradora da SP para os termos positivos (FERREIRA, 2015):

$$P_{(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n,$$

em que $n \in \mathbb{N}$, x_1, x_2 e x_3 são as raízes da equação característica, e os coeficientes da função são:

$$A = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, B = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, C = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Demonstração. Sabe-se que a relação de recorrência da SP é conhecida por $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ e $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, possuindo equação característica $x^3 - x - 1 = 0$ com raízes x_1, x_2, x_3 . Com isso, $P_{(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n$. Para determinar os coeficientes A, B, C utilizam-se as condições iniciais $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, e a partir daí, obtêm-se o sistema:

$$\begin{cases} A + B + C &= 1 \\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 &= 1 \\ Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 &= 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$\begin{aligned} A &= \frac{-x_2 + x_2x_3 - x_3 + 1}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3} = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \\ B &= \frac{-x_1 + x_1x_3 - x_3 + 1}{x_2^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3} = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \\ C &= \frac{-x_1 + x_1x_2 - x_2 + 1}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3} = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}. \end{aligned}$$

Ressalta-se que a fórmula de Binet pode ser obtida por meio do método de BenTaher-Rachidi, estudado nos trabalhos de Sá e Spreafico (2020) e Taher e Rachidi (2016). Consiste em se obter os coeficientes de uma determinada equação, proposta por BenTaher-Rachidi, sem a necessidade de se resolver um sistema linear.

A função geradora permite a resolução de recorrências lineares com coeficientes constantes (KOSHY, 2001; SOYKAN 2020). Tal procedimento demonstrou como encontrar os números de Fibonacci sem ser necessário calcular todos os números que o procedem.

Teorema 15. A função geradora da SP para os termos positivos (FERREIRA, 2015):

$$g(P_n, x) = \frac{1+x}{1-x^2-x^3}.$$

Demonstração. Esta é uma série formal em que os seus coeficientes obtêm informações sobre uma sucessão a_n com n pertencendo aos números naturais, e sendo uma função $g(a_n, x)$ definida pela série:

$$g(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots$$

Da mesma maneira como ocorre com a SF, em Padovan essa função é multiplicada por x^2, x^3 nas equações abaixo, devido à sua relação de recorrência.

Assim, para Padovan, com os seus valores iniciais $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, tem-se que:

$$g(P_{(n)}, x) = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + P_4 x^4 + \dots \quad (1.2)$$

$$x^2 g(P_{(n)}, x) = P_0 x^2 + P_1 x^3 + P_2 x^4 + P_3 x^5 + P_4 x^6 + \dots \quad (1.3)$$

$$x^3 g(P_{(n)}, x) = P_0 x^3 + P_1 x^4 + P_2 x^5 + P_3 x^6 + P_4 x^7 + \dots \quad (1.4)$$

Baseada na Equação (1.2 - 1.3 + 1.4), tem-se que:

$$g(P_n, x)(1 - x^2 - x^3) = P_0 + P_1 x + (P_2 - P_0)x^2$$

$$g(P_n, x)(1 - x^2 - x^3) = 1 + x$$

$$g(P_n, x) = \frac{1 + x}{1 - x^2 - x^3}$$

A seguir, a Figura 8 apresenta uma caracterização (HUNTLEY, 1985), que diz: ao serem determinados os primeiros coeficientes dados pelo desenvolvimento da divisão direta, forma-se a série de Fibonacci, e da mesma forma ocorre para a série de Padovan e suas extensões. Este procedimento foi realizado utilizando o *software* Maxima¹.

1 *Software* matemático gratuito de computação algébrica, permitindo plotagem de gráficos e resoluções de problemas, cuja licença é fornecida pela *General Public License*.

Figura 8 – Desenvolvimento da Função Geradora de Padovan para os termos positivos.

```
(%i2) ((1+x)/(1-x^2-x^3));
taylor ((1+x)/(-x^3-x^2+1),x,0,70);

(%o1) 
$$\frac{x+1}{-x^3-x^2+1}$$


(%o2)/T/ 
$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+7x^8+9x^9+12x^{10}+16x^{11}+21x^{12}+28x^{13}+37x^{14}+49x^{15}+65x^{16}+86x^{17}+114x^{18}+151x^{19}+200x^{20}+265x^{21}+351x^{22}+465x^{23}+616x^{24}+816x^{25}+1081x^{26}+1432x^{27}+1897x^{28}+2513x^{29}+3329x^{30}+4410x^{31}+5842x^{32}+7739x^{33}+10252x^{34}+13581x^{35}+17991x^{36}+23833x^{37}+31572x^{38}+41824x^{39}+55405x^{40}+73396x^{41}+97229x^{42}+128801x^{43}+170625x^{44}+226030x^{45}+299426x^{46}+396655x^{47}+525456x^{48}+696081x^{49}+922111x^{50}+1221537x^{51}+1618192x^{52}+2143648x^{53}+2839729x^{54}+3761840x^{55}+4983377x^{56}+6601569x^{57}+8745217x^{58}+11584946x^{59}+15346786x^{60}+20330163x^{61}+26931732x^{62}+35676949x^{63}+47261895x^{64}+62608681x^{65}+82938844x^{66}+109870576x^{67}+145547525x^{68}+192809420x^{69}+255418101x^{70}+...$$

```

Fonte: Elaborado pelos autores

Assim como ocorre para os números positivos, existe uma função geradora para os números com índice inteiro não positivo, de tal forma que os expoentes de x são considerados como sendo positivos, porém as suas posições são referentes aos termos com índice inteiro não positivo da SP. Isso acontece pelo fato de utilizarmos a Série de Taylor para compor esses elementos, e esta série é iniciada a partir de zero (KNOPP, 1990).

Teorema 16. A função geradora da SP para os termos com índice inteiro não positivo é descrita por:

$$g(P_{-n}, x) = \frac{-x^2 - x - 1}{x^3 - x - 1}.$$

Demonstração. A função $g(P_{-n}, x)$ é multiplicada por x^3 e x , de acordo com a fórmula de recorrência (Definição 3). Considerando $P_0 = 1, P_{-1} = 0, P_{-2} = 1$, tem-se que:

$$g(P_{(-n)}, x) = P_0 + P_{-1}x + P_{-2}x^2 + P_{-3}x^3 + P_{-4}x^4 + \dots \quad (1.5)$$

$$xg(P_{(-n)}, x) = P_0x + P_{-1}x^2 + P_{-2}x^3 + P_{-3}x^4 + P_{-4}x^5 + \dots \quad (1.6)$$

$$x^3g(P_{(-n)}, x) = P_0x^3 + P_{-1}x^4 + P_{-2}x^5 + P_{-3}x^6 + P_{-4}x^7 + \dots \quad (1.7)$$

De acordo com a Equação [(1.7) - (1.6+1.5)], resulta em:

$$g(P_{-n}, x)(x^3 - x - 1) = -P_0x - P_{-1}x^2 - P_0 - P_{-1}x - P_{-2}x^2$$

$$g(P_{-n}, x)(x^3 - x - 1) = -x^2 - x - 1$$

$$g(P_{-n}, x) = \frac{-x^2 - x - 1}{x^3 - x - 1}.$$

Logo abaixo é mostrada na Figura 9, o *software* Maxima.

Figura 9 – Desenvolvimento da Função Geradora de Padovan para números com índice inteiro não positivo.

```
(%i2) ((-x^2-x-1)/(x^3-x-1));
      taylor ((-x^2-x-1)/(x^3-x-1),x,0,70);
(%o1)
      -x^2-x-1
      x^3-x-1
(%o2)/7/ 1+x^2+x^5-x^6+x^7-x^9+2x^10-2x^11+x^12+x^13-3x^14+4x^15-3x^16+4x^18-7x^19+7x^20-3x^21-4x^22+
      11x^23-14x^24+10x^25+x^26-15x^27+25x^28-24x^29+9x^30+16x^31-40x^32+49x^33-33x^34-7x^35+56x^36-89
      x^37+82x^38-26x^39-63x^40+145x^41-171x^42+108x^43+37x^44-208x^45+316x^46-279x^47+71x^48+245x^49-
      524x^50+595x^51-350x^52-174x^53+769x^54-1119x^55+945x^56-176x^57-943x^58+1888x^59-2064x^60+1121
      x^61+767x^62-2831x^63+3952x^64-3185x^65+354x^66+3598x^67-6783x^68+7137x^69-3539x^70+...
```

Fonte: Elaborado pelos autores

A fórmula de Binet e a função geradora de Tridovan

Levando em consideração a fórmula de recorrência de Tridovan (ver Definição 4), o polinômio característico desta sequência é calculado através do teorema abaixo.

Teorema 17. O polinômio característico de Tridovan é (VIEIRA; ALVES, 2019d):

$$x^4 - x^2 - x - 1 = 0. \quad (1.8)$$

Demonstração. De acordo com o Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que o polinômio característico de Tridovan é dado por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - Q_3)'$$

$$\text{com } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ e } Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^4 - \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Então: $p(\lambda) = 0$, tem-se: $\lambda^4 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Logo: $x^4 - x^2 - x - 1 = 0$.

Em que realizando o cálculo para encontrar as raízes de tal polinômio, tem-se:

$$S = \sqrt[3]{\frac{29}{54} + \sqrt{\left(\frac{-1}{9}\right)^3 + \left(\frac{29}{54}\right)^2}}, T = \sqrt[3]{\frac{29}{54} - \sqrt{\left(\frac{-1}{9}\right)^3 + \left(\frac{29}{54}\right)^2}}.$$

Desta forma, as raízes calculadas são:

$$x_1 = \frac{1}{3} + S + P, x_2 = -1, x_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(S + T) + \frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)i, x_4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(S + T) - \frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)i.$$

A partir do polinômio característico descrito, pode-se obter a fórmula completa de Binet para Tridovan.

Teorema 18. Fórmula de Binet de Tridovan, com $n \in \mathbb{N}$ é descrita por (VIEIRA; ALVES, 2019d):

$$P_{3(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n + D(x_4)^n,$$

em que $n \in \mathbb{N}$, x_1, x_2, x_3 e x_4 são as raízes da equação característica de Tridovan e os coeficientes da função são:

$$A = \frac{x_1^2 + x_1 + 1}{2x_1^4 + x_1 + 2}, B = \frac{x_2^2 + x_2 + 1}{2x_2^4 + x_2 + 2}, C = \frac{x_3^2 + x_3 + 1}{2x_3^4 + x_3 + 2}, D = \frac{x_4^2 + x_4 + 1}{2x_4^4 + x_4 + 2}.$$

Demonstração. De acordo com a recorrência da sequência de Tridovan, conhecida por $P_{3(n)} = P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}$ e $P_{3(0)} = 1, P_{3(1)} = 0, P_{3(2)} = P_{3(3)} = 1$, possuindo equação característica $x^4 - x^2 - x - 1 = 0$ com raízes x_1, x_2, x_3, x_4 . Com isso, $P_{3(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n + D(x_4)^n$. Para determinar os coeficientes A, B, C, D utiliza-se as condições iniciais $P_{3(0)} = 1, P_{3(1)} = 0, P_{3(2)} = P_{3(3)} = 1$, obtendo o sistema:

$$\begin{cases} A + B + C + D = 1 \\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0 \\ Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + Dx_4^2 = 1 \\ Ax_1^3 + Bx_2^3 + Cx_3^3 + Dx_4^3 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$\begin{aligned} A &= \frac{-x_4 - x_2 - x_2x_3x_4 - x_3 + 1}{x_1^3 - x_4x_1^2 - x_2x_1^2 + x_1x_2x_4 - x_3x_1^2 + x_1x_3x_4 - x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3}, \\ B &= \frac{-x_4 - x_1 - x_4x_1x_3 - x_3 + 1}{x_2^3 - x_4x_2^2 - x_1x_2^2 + x_1x_2x_4 - x_1x_3x_4 - x_2^2x_3 + x_4x_2x_3 + x_1x_2x_3}, \\ C &= \frac{x_4 + x_1 + x_1x_2x_4 + x_2 - 1}{-x_3^3 + x_1x_2x_4 + x_4x_3^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 - x_1x_3x_4 - x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3}, \\ D &= \frac{-x_1 - x_2 - x_1x_2x_3 - x_3 + 1}{x_4^3 - x_1x_4^2 - x_2x_4^2 + x_1x_2x_4 - x_3x_4^2 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3}. \end{aligned}$$

Utilizando as relações $x_1x_2x_3x_4 = -1$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ e $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 1$, é fácil ver que:

$$C = \frac{-x_3 - \frac{1}{x_3} - 1}{-2x_3^3 - 1 - \frac{2}{x_3}} = \frac{-(x_3^2 + x_3 + 1)}{-(2x_3^4 + x_3 + 2)} = \frac{x_3^2 + x_3 + 1}{2x_3^4 + x_3 + 2}, D = \frac{x_4 + \frac{1}{x_4} + 1}{2x_4^3 + 1 + \frac{2}{x_4}} = \frac{x_4^2 + x_4 + 1}{2x_4^4 + x_4 + 2}.$$

A função geradora de Tridovan para os termos positivos, por sua vez, é obtida da seguinte maneira:

Teorema 19. A função geradora de Tridovan, $P_{3(n)}$, para os termos positivos é (VIEIRA; ALVES, 2019d):

$$g(P_{3(n)}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{3(n)} x^n = \frac{1}{(1 - x^2 - x^3 - x^4)}.$$

Demonstração. Dada a função:

$g(P_{3(n)}, x) = P_{3(0)} + P_{3(1)}x + P_{3(2)}x^2 + P_{3(3)}x^3 + P_{3(4)}x^4 + \dots$, esta é então multiplicada por x^2 , x^3 , x^4 , resultando em:

$$g(P_{3(n)}, x) = P_{3(0)} + P_{3(1)}x + P_{3(2)}x^2 + P_{3(3)}x^3 + P_{3(4)}x^4 + \dots \quad (1.9)$$

$$x^2 g(P_{3(n)}, x) = P_{3(0)}x^2 + P_{3(1)}x^3 + P_{3(2)}x^4 + P_{3(3)}x^5 + P_{3(4)}x^6 + \dots \quad (1.10)$$

$$x^3 g(P_{3(n)}, x) = P_{3(0)}x^3 + P_{3(1)}x^4 + P_{3(2)}x^5 + P_{3(3)}x^6 + P_{3(4)}x^7 + \dots \quad (1.11)$$

$$x^4 g(P_{3(n)}, x) = P_{3(0)}x^4 + P_{3(1)}x^5 + P_{3(2)}x^6 + P_{3(3)}x^7 + P_{3(4)}x^8 + \dots \quad (1.12)$$

Manipulando as equações da seguinte forma: [1.9-(1.10+1.11+1.12)], tem-se $g(P_{3(n)}, x) - [x^2 g(P_{3(n)}, x) + x^3 g(P_{3(n)}, x) + x^4 g(P_{3(n)}, x)]$, em que $P_{3(0)} = 1, P_{3(1)} = 0, P_{3(2)} = P_{3(3)} = 1$, obtêm-se:

$$g(P_{3(n)}, x)(1 - x^2 - x^3 - x^4) = P_{3(0)} + P_{3(1)}x + (P_{3(2)} - P_{3(0)})x^2$$

$$g(P_{3(n)}, x)(1 - x^2 - x^3 - x^4) = 1$$

$$g(P_{3(n)}, x) = \frac{1}{(1 - x^2 - x^3 - x^4)}.$$

Na Figura 10, pode-se visualizar os coeficientes da função geradora de Tridovan para os termos positivos através do *software* Maxima.

Figura 10 – Desenvolvimento da Função Geradora de Tridovan para os termos positivos.

```
(%i1) 1/(1-x^2-x^3-x^4);
(%o1)
      1
-----
-x^4-x^3-x^2+1

(%i2) taylor (1/(-x^4-x^3-x^2+1), x, 0, 70);
(%o2)/T/ 1+x^2+x^3+2x^4+2x^5+4x^6+5x^7+8x^8+11x^9+17x^10+24x^11+36x^12+52x^13+77x^14+112x^15
+165x^16+241x^17+354x^18+518x^19+760x^20+1113x^21+1632x^22+2391x^23+3505x^24+5136x^25+7528x^26
+11032x^27+16169x^28+23696x^29+34729x^30+50897x^31+74594x^32+109322x^33+160220x^34+234813x^35+
344136x^36+504355x^37+739169x^38+1083304x^39+1587660x^40+2326828x^41+3410133x^42+4997792x^43+
7324621x^44+10734753x^45+15732546x^46+23057166x^47+33791920x^48+49524465x^49+72581632x^50+
106373551x^51+155898017x^52+228479648x^53+334853200x^54+490751216x^55+719230865x^56+1054084064
x^57+1544835281x^58+2264066145x^59+3318150210x^60+4862985490x^61+7127051636x^62+10445201845x^63+
15308187336x^64+22435238971x^65+32880440817x^66+48188628152x^67+70623867124x^68+103504307940x^69
+151692936093x^70+...
```

Fonte: Elaborado pelos autores

Para os termos com índices inteiros não positivos, a função geradora de Tridovan é obtida através do teorema abaixo.

Teorema 20. A função geradora de Tridovan para índice inteiro não positivo é:

$$g(P_{3(-n)}, x) = \frac{-x^2 - x - 1}{(x^4 - x^2 - x - 1)}.$$

Demonstração. Baseado na função

$g(P_{3(-n)}, x) = P_{3(0)} + P_{3(-1)}x + P_{3(-2)}x^2 + P_{3(-3)}x^3 + P_{3(-4)}x^4 + \dots$, pode-se multiplicar por x , x^2 , x^4 , obtendo-se:

$$g(P_{3(-n)}, x) = P_{3(0)} + P_{3(-1)}x + P_{3(-2)}x^2 + P_{3(-3)}x^3 + P_{3(-4)}x^4 + \dots \quad (1.13)$$

$$xg(P_{3(-n)}, x) = P_{3(0)}x + P_{3(-1)}x^2 + P_{3(-2)}x^3 + P_{3(-3)}x^4 + P_{3(-4)}x^5 + \dots \quad (1.14)$$

$$x^2g(P_{3(-n)}, x) = P_{3(0)}x^2 + P_{3(-1)}x^3 + P_{3(-2)}x^4 + P_{3(-3)}x^5 + P_{3(-4)}x^6 + \dots \quad (1.15)$$

$$x^4g(P_{3(-n)}, x) = P_{3(0)}x^4 + P_{3(-1)}x^5 + P_{3(-2)}x^6 + P_{3(-3)}x^7 + P_{3(-4)}x^8 + \dots \quad (1.16)$$

Assim, realizando $[1.16 - (1.15 + 1.14 + 1.13)]$, tem-se que

$$x^4g(P_{3(-n)}, x) - [x^2g(P_{3(-n)}, x) + xg(P_{3(-n)}, x) + g(P_{3(-n)}, x)]$$

e com $P_{3(0)} = 1, P_{3(-1)} = P_{3(-2)} = P_{3(-3)} = 0$, obtêm-se:

$$g(P_{3(-n)}, x)(x^4 - x^2 - x - 1) = -P_{3(0)}(x^2 + x) - P_{3(-1)}(x^3 + x^2) - (P_{3(-2)}x^3)$$

$$g(P_{3(-n)}, x)(x^4 - x^2 - x - 1) = -x^2 - x - 1$$

$$g(P_{3(-n)}, x) = \frac{-x^2 - x - 1}{(x^4 - x^2 - x - 1)}.$$

De acordo com a Figura 11, a seguir, é possível visualizar os coeficientes da função geradora de Tridovan utilizando o mesmo *software*.

Figura 11 – Desenvolvimento da Função Geradora de Tridovan para índice inteiro não positivo.

```
(%i2)      ((-x^2-x-1)/(x^4-x^2-x-1));
          taylor ((-x^2-x-1)/(x^4-x^2-x-1),x,0,70);

(%o1)      -x^2-x-1
           x^4-x^2-x-1

(%o2)T/      1 + x^4 - x^5 + x^7 - 2 x^9 + 2 x^10 + x^11 - 3 x^12 + 5 x^14 - 4 x^15 - 4 x^16 + 8 x^17 + x^18 - 13 x^19 + 8 x^20 + 13
x^21 - 20 x^22 - 6 x^23 + 34 x^24 - 15 x^25 - 39 x^26 + 48 x^27 + 25 x^28 - 88 x^29 + 24 x^30 + 112 x^31 - 111 x^32 - 89 x^33 +
224 x^34 - 23 x^35 - 312 x^36 + 246 x^37 + 290 x^38 - 559 x^39 - 43 x^40 + 848 x^41 - 515 x^42 - 892 x^43 + 1364 x^44 + 376
x^45 - 2255 x^46 + 987 x^47 + 2632 x^48 - 3243 x^49 - 1644 x^50 + 5874 x^51 - 1598 x^52 - 7519 x^53 + 7473 x^54 + 5920 x^55
- 14991 x^56 + 1552 x^57 + 20912 x^58 - 16544 x^59 - 19359 x^60 + 37455 x^61 + 2816 x^62 - 56815 x^63 + 34640 x^64 +
59630 x^65 - 91454 x^66 - 24991 x^67 + 151085 x^68 - 66464 x^69 - 176075 x^70 + ...
```

Fonte: Elaborado pelos autores

A fórmula de Binet e a função geradora de Tetradovan

Para os números da sequência de Tetradovan, dados pela relação de recorrência estudada anteriormente (ver Definição 6), pode-se perceber que é possível calcular o seu polinômio característico através do teorema descrito abaixo.

Teorema 21. O polinômio característico de Tetradovan (VIEIRA; ALVES, 2019d):

$$x^5 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0. \quad (1.17)$$

Demonstração. Fundamentado no Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que o polinômio característico de Tetradovan é dado por (GOMES; OLIVEIRA, 2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - Q_4),$$

$$\text{com } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \lambda \in \mathbb{C}, \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ e } Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \lambda^5 - \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Então: $p(\lambda) = 0$, tem-se: $\lambda^5 - \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Logo: $x^5 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.

Para encontrar as raízes deste polinômio, é importante lembrar que não existem fórmulas algébricas na resolução de equações polinomiais a partir do quinto grau.

Existem muitos meios para obter as raízes de uma equação matemática, dependendo do seu grau. Assim, para polinômio do 2º grau, conhecemos o método de Bhaskara; para polinômios do 3º grau, existe o método de Cardano, porém para graus superiores à quarta ordem, Abel provou que não é possível resolver equações por meio de radicais e combinações dos coeficientes (CLAUDIO; MARINS, 2000). Com isso, utilizam-se métodos numéricos e recursos computacionais a fim de não ser possível obter as raízes desses polinômios de grau superior a quatro. Diante disso, uma análise das raízes reais dos polinômios característicos das sequências estudadas até então (Padovan, Tridovan e Tetradovan) é discutida através do método de Newton, utilizando-se o fractal e a ferramenta computacional Google Colab, para verificação com base no trabalho de Vieira, Alves e Catarino (2019a).

Teorema 22. A fórmula de Binet para Tetradovan é dada por (VIEIRA; ALVES, 2019d):

$$P_{4(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n + D(x_4)^n + E(x_5)^n,$$

em que $n \in \mathbb{N}$, x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são as raízes da equação característica de Tetradovan, onde, para realizar o cálculo dessas raízes, utilizam-se recursos computacionais (BERGLUND, 2011). Os valores dos coeficientes da função são:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x_1^3 + x_1^2 + x_1 - 1}{2x_1^5 + x_1^3(x_1^2 - 1) - x_1^2(x_1 - x_1^3 + 1) - 1}, \\ B &= \frac{x_2^3 + x_2^2 + x_2 - 1}{2x_2^5 + x_2^3(x_2^2 - 1) - x_2^2(x_2 - x_2^3 + 1) - 1}, \\ C &= \frac{x_3^3 + x_3^2 + x_3 - 1}{2x_3^5 + x_3^3(x_3^2 - 1) - x_3^2(x_3 - x_3^3 + 1) - 1}, \\ D &= \frac{x_4^3 + x_4^2 + x_4 - 1}{2x_4^5 + x_4^3(x_4^2 - 1) - x_4^2(x_4 - x_4^3 + 1) - 1}, \\ E &= \frac{x_5^3 + x_5^2 + x_5 - 1}{2x_5^5 + x_5^3(x_5^2 - 1) - x_5^2(x_5 - x_5^3 + 1) - 1}. \end{aligned}$$

Demonstração. Através da recorrência da sequência de Tetradovan, conhecida por $P_{4(n)} = P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}$ e $P_{4(0)} = 1; P_{4(1)} = 0; P_{4(2)} = P_{4(3)} = 1; P_{4(4)} = 2$, possuindo equação característica $x^5 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ com raízes x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . e, com isso, $P_{4(n)} = P_{4(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n + D(x_4)^n + E(x_5)^n$. Para determinar os coeficientes A, B, C, D, E utilizam-se as condições iniciais $P_{4(0)} = 1; P_{4(1)} = 0; P_{4(2)} = P_{4(3)} = 1; P_{4(4)} = 2$, obtendo o sistema:

$$\begin{cases} A+B+C+D+E & = 1 \\ Ax_1+Bx_2+Cx_3+Dx_4+Ex_5 & = 0 \\ Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2+Dx_4^2+Ex_5^2 & = 1 \\ Ax_1^3+Bx_2^3+Cx_3^3+Dx_4^3+Ex_5^3 & = 1 \\ Ax_1^4+Bx_2^4+Cx_3^4+Dx_4^4+Ex_5^4 & = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema e através das relações $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$,
 $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5=-1$,

$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4+x_1x_2x_5+x_1x_3x_5+x_1x_4x_5+x_2x_3x_5+x_2x_4x_5+x_3x_4x_5=1$
e $x_1x_2x_3x_4x_5=-1$, tem-se que:

$$\forall = \frac{x_1^4(x_2^3x_3^2+x_2^3x_4^2+x_2^3x_5^2+x_3^2x_4^2+x_3^2x_5^2+x_4^2x_5^2)-x_1^3(x_2^5x_4^2+x_2^5x_5^2+x_3^2x_4^2+x_3^2x_5^2)+x_2^5x_3^2x_4^2+x_2^5x_3^2x_5^2+5x_1^4}{x_2^5x_3^2x_4^2x_5^2+x_2^5x_3^3+x_2^5x_4^3+x_2^5x_5^3-x_3^5+x_3^2x_4^4+x_3^2x_5^4-x_4^4+x_4^2x_5^4+5}$$

$$= \frac{-\frac{1}{x_1}+x_1+x_1^2+1}{x_1^2(x_1^2-1)-x_1(x_1-x_1^3+1)-\frac{1}{x_1}+2x_1^4} = \frac{x_1^3+x_1^2+x_1-1}{2x_1^5+x_1^3(x_1^2-1)-x_1^2(x_1-x_1^3+1)-1},$$

$$B = \frac{-x_1x_3x_4x_5-x_1x_3-x_1x_4-x_1x_5+x_1-x_3x_4-x_3x_5+x_3-x_4x_5+x_4+x_5-2}{-x_2^2(x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5)+x_2(x_1x_3x_4+x_1x_3x_5+x_1x_4x_5+x_3x_4x_5)-x_1x_3x_4x_5-2x_2^4}$$

$$= \frac{\frac{1}{x_2}-x_2-x_2^2-1}{-x_2^2(x_2^2-1)+x_2(x_2-x_2^3+1)+\frac{1}{x_2}-2x_2^4} = \frac{-x_2^3-x_2^2-x_2+1}{-2x_2^5-x_2^3(x_2^2-1)+x_2^2(x_2-x_2^3+1)+1}$$

$$= \frac{-(x_2^3+x_2^2+x_2-1)}{-2(x_2^5+x_2^3(x_2^2-1)-x_2^2(x_2-x_2^3+1)-1)} = \frac{x_2^3+x_2^2+x_2-1}{2x_2^5+x_2^3(x_2^2-1)-x_2^2(x_2-x_2^3+1)-1},$$

$$C = \frac{x_1x_2x_4x_5+x_1x_2+x_1x_4+x_1x_5-x_1+x_2x_4+x_2x_5-x_2+x_4x_5-x_4-x_5+2}{x_3^2(x_1x_2+x_2x_3+x_2x_4+x_4x_5+x_1x_5+x_1x_4)-x_3(x_1x_2x_4+x_1x_2x_5+x_1x_4x_5+x_2x_4x_5)+x_1x_2x_4x_5+2x_3^4}$$

$$= \frac{-\frac{1}{x_3}+x_3+x_3^2+1}{x_3^2(x_3^2-1)-x_3(x_3-x_3^3+1)-\frac{1}{x_3}+2x_3^4} = \frac{x_3^3+x_3^2+x_3-1}{2x_3^5+x_3^3(x_3^2-1)-x_3^2(x_3-x_3^3+1)-1},$$

$$\begin{aligned}
D &= \frac{-x_1x_2x_3x_5 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_5 + x_1 - x_2x_3 - x_2x_5 + x_2 - x_3x_5 + x_3 + x_5 - 2}{-x_4^2(x_2x_5 + x_3x_5 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2) + x_4(x_4 - x_4^3 + 1) - x_1x_2x_3x_5 - 2x_4^4} \\
&= \frac{\frac{1}{x_4} - x_4 - x_4^2 - 1}{-x_4^2(x_4^2 - 1) + x_4(x_4 - x_4^3 + 1) + \frac{1}{x_4} - 2x_4^4} = \frac{-x_4^3 - x_4^2 - x_4 + 1}{-2x_4^5 - x_4^3(x_4^3 - 1) + x_4^2(x_4 - x_4^3 + 1) + 1} \\
&= \frac{-(x_4^3 + x_4^2 + x_4 - 1)}{-(2x_4^5 + x_4^3(x_4^3 - 1) - x_4^2(x_4 - x_4^3 + 1) - 1)} = \frac{x_4^3 + x_4^2 + x_4 - 1}{2x_4^5 + x_4^3(x_4^3 - 1) - x_4^2(x_4 - x_4^3 + 1) - 1}, \\
E &= \frac{x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 - x_1 + x_2x_3 + x_2x_4 - x_2 + x_3x_4 - x_3 - x_4 + 2}{-x_5(x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4) + x_5^2(x_3x_4 + x_2x_4 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_1x_3 + x_1x_2) + x_1x_2x_3x_4 + 2x_5^4} \\
&= \frac{-\frac{1}{x_5} + x_5^2 + 1 + x_5}{x_5^2(x_5^2 - 1) - x_5(x_5 - x_5^3 + 1) - \frac{1}{x_5} + 2x_5^4} = \frac{x_5^3 + x_5^2 + x_5 - 1}{2x_5^5 + x_5^3(x_5^3 - 1) - x_5^2(x_5 - x_5^3 + 1) - 1}.
\end{aligned}$$

A função geradora de Tetradovan (lado direito) dar-se-á pelo seguinte modo:

Teorema 23. A função geradora de Tetradovan, $P_{4(n)}$, para os termos positivos é (VIEIRA; ALVES, 2019d):

$$g(P_{4(n)}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{4(n)} x^n = \frac{1}{(1 - x^2 - x^3 - x^4 - x^5)}.$$

Demonstração. Com base na função:

$g(P_{4(n)}, x) = P_{4(0)} + P_{4(1)}x + P_{4(2)}x^2 + P_{4(3)}x^3 + P_{4(4)}x^4 + \dots$, pode-se multiplicar por x^2 , x^3 , x^4 , x^5 , obtendo:

$$g(P_{4(n)}, x) = P_{4(0)} + P_{4(1)}x + P_{4(2)}x^2 + P_{4(3)}x^3 + P_{4(4)}x^4 + \dots \quad (1.18)$$

$$x^2 g(P_{4(n)}, x) = P_{4(0)}x^2 + P_{4(1)}x^3 + P_{4(2)}x^4 + P_{4(3)}x^5 + P_{4(4)}x^6 + \dots \quad (1.19)$$

$$x^3 g(P_{4(n)}, x) = P_{4(0)}x^3 + P_{4(1)}x^4 + P_{4(2)}x^5 + P_{4(3)}x^6 + P_{4(4)}x^7 + \dots \quad (1.20)$$

$$x^4 g(P_{4(n)}, x) = P_{4(0)}x^4 + P_{4(1)}x^5 + P_{4(2)}x^6 + P_{4(3)}x^7 + P_{4(4)}x^8 + \dots \quad (1.21)$$

$$x^5 g(P_{4(n)}, x) = P_{4(0)}x^5 + P_{4(1)}x^6 + P_{4(2)}x^7 + P_{4(3)}x^8 + P_{4(4)}x^9 + \dots \quad (1.22)$$

Manipulando as equações da seguinte forma: $[1.18 - (1.19 + 1.20 + 1.21 + 1.22)]$, tem-se $g(P_{4(n)}, x) - [x^2 g(P_{4(n)}, x) + x^3 g(P_{4(n)}, x) + x^4 g(P_{4(n)}, x) + x^5 g(P_{4(n)}, x)]$ e com $P_{4(0)} = 1, P_{4(1)} = 0, P_{4(2)} = P_{4(3)} = 1$, é possível calcular a seguinte equação:

$$\begin{aligned} g(P_{4(n)}, x)(1 - x^2 - x^3 - x^4) &= P_{4(0)} + P_{4(1)}x + (P_{4(2)} - P_{4(0)})x^2 \\ g(P_{4(n)}, x)(1 - x^2 - x^3 - x^4 - x^5) &= 1 \\ g(P_{4(n)}, x) &= \frac{1}{(1 - x^2 - x^3 - x^4 - x^5)}. \end{aligned}$$

Para que haja um melhor entendimento, a Figura 12, a seguir, mostra os coeficientes dos números de Tetradovan (lado direito da sequência), através da divisão direta, utilizando-se o *software* Maxima.

Figura 12 – Desenvolvimento da Função Geradora de Tetradovan para os termos positivos.

```
(%i2) 1/(-x^2-x^3-x^4-x^5);
taylor (1/(-x^5-x^4-x^3-x^2+1),x, 0, 70);

(%o1)
      1
-----
-x^5-x^4-x^3-x^2+1

(%o2)/t1 1+x^2+x^3+2x^4+3x^5+4x^6+7x^7+10x^8+16x^9+24x^10+37x^11+57x^12+87x^13+134x^14+205x^15+315x^16+483x^17+741x^18+1137x^19+1744x^20+2676x^21+4105x^22+6298x^23+9662x^24+14823x^25+22741x^26+34888x^27+53524x^28+82114x^29+125976x^30+193267x^31+296502x^32+454881x^33+697859x^34+1070626x^35+1642509x^36+2519868x^37+3865875x^38+5930862x^39+9098878x^40+13959114x^41+21415483x^42+32854729x^43+50404337x^44+77328204x^45+118633663x^46+182002753x^47+279220933x^48+428368957x^49+657185553x^50+1008226306x^51+1546778196x^52+2373001749x^53+3640559012x^54+5585191804x^55+8568565263x^56+13145530761x^57+20167317828x^58+30939846840x^59+47466605656x^60+72821260692x^61+111719301085x^62+171395031016x^63+262947014273x^64+403402198449x^65+618882607066x^66+949463544823x^67+1456626850804x^68+2234695364611x^69+3428375201142x^70+...
```

Fonte: Elaborado pelos autores

Para índice inteiro não positivo, a função geradora de Tetradovan é obtida através do teorema abaixo.

Teorema 24. A função geradora de Tetradovan para os termos negativos é dada por:

$$g(P_{4(-n)}, x) = \frac{-x^3 - x^2 - x - 1}{(x^5 - x^3 - x^2 - x - 1)}.$$

Demonstração. Multiplicando a função:

$g(P_{4(-n)}, x) = P_{4(0)} + P_{4(-1)}x + P_{4(-2)}x^2 + P_{4(-3)}x^3 + P_{4(-4)}x^4 + \dots$ por x^3, x^2, x , tem-se que:

$$g(P_{4(-n)}, x) = P_{4(0)} + P_{4(-1)}x + P_{4(-2)}x^2 + P_{4(-3)}x^3 + P_{4(-4)}x^4 + \dots \quad (1.23)$$

$$xg(P_{4(-n)}, x) = P_{4(0)}x + P_{4(-1)}x^2 + P_{4(-2)}x^3 + P_{4(-3)}x^4 + P_{4(-4)}x^5 + \dots \quad (1.24)$$

$$x^2g(P_{4(-n)}, x) = P_{4(0)}x^2 + P_{4(-1)}x^3 + P_{4(-2)}x^4 + P_{4(-3)}x^5 + P_{4(-4)}x^6 + \dots \quad (1.25)$$

$$x^3g(P_{4(-n)}, x) = P_{4(0)}x^3 + P_{4(-1)}x^4 + P_{4(-2)}x^5 + P_{4(-3)}x^6 + P_{4(-4)}x^7 + \dots \quad (1.26)$$

$$x^5g(P_{4(-n)}, x) = P_{4(0)}x^5 + P_{4(-1)}x^6 + P_{4(-2)}x^7 + P_{4(-3)}x^8 + P_{4(-4)}x^9 + \dots \quad (1.27)$$

Assim, é possível obter a seguinte relação [1.27 - (1.26 + 1.25 + 1.24 + 1.23)], resultando em

$$x^5g(P_{4(-n)}, x) - [x^3g(P_{4(-n)}, x) + x^2g(P_{4(-n)}, x) + xg(P_{4(-n)}, x) + g(P_{4(-n)}, x)]$$

, e com os valores $P_{4(0)} = 1, P_{4(-1)} = P_{4(-2)} = P_{4(-3)} = P_{4(-4)} = 0$, tem-se:

$$g(P_{4(-n)}, x)(x^5 - x^3 - x^2 - x - 1) = -P_{4(0)}(x^3 + x^2 + x + 1) - P_{4(-1)}(x^4 + x^3 + x^2 + x) - P_{4(-2)}(x^4 + x^3 + x^2) - P_{4(-3)}(x^4 + x^3) - P_{4(-4)}x^4$$

$$g(P_{4(-n)}, x)(x^5 - x^3 - x^2 - x - 1) = -x^3 - x^2 - x - 1$$

$$g(P_{4(-n)}, x) = \frac{-x^3 - x^2 - x - 1}{(x^5 - x^3 - x^2 - x - 1)}.$$

A Figura 13, a seguir, apresenta os termos da sequência de Tetradovan de índice inteiro não positivo da sequência, com a utilização do *software* Maxima.

Figura 13 – Função Geradora de Tetradovan para índice inteiro não positivo.

```
(%i2) (-x^3-x^2-x-1)/(x^5-x^3-x^2-x-1);
taylor (((-x^3-x^2-x-1)/(x^5-x^3-x^2-x-1)),x,0,70);

(%o1)
      -x^3-x^2-x-1
      x^5-x^3-x^2-x-1
      1+x^5-x^6+x^9-2x^11+x^12+x^13+x^14-3x^15-x^16+4x^17+x^18-3x^19-5x^20+6x^21+6x^22-
      6x^23-9x^24+4x^25+17x^26-6x^27-21x^28+x^29+30x^30+7x^31-44x^32-14x^33+52x^34+36x^35-67x^36-
      65x^37+82x^38+102x^39-83x^40-168x^41+84x^42+249x^43-63x^44-353x^45-x^46+501x^47+102x^48-665
      x^49-291x^50+853x^51+604x^52-1064x^53-1058x^54+1227x^55+1748x^56-1313x^57-2726x^58+1233x^59+
      4033x^60-792x^61-5787x^62-180x^63+7992x^64+2008x^65-10612x^66-5175x^67+13599x^68+10180x^69-
      16596x^70+...
```

Fonte: Elaborado pelos autores

A fórmula de Binet e a função geradora de Z-Dovan

O polinômio característico da sequência de Z-dovan pode ser calculado de forma semelhante ao realizado nas Equações (1.8 e 1.17). É importante notar a existência do primeiro coeficiente igual a zero nestas equações, validando a fórmula de recorrência destas sequências.

Definição 13. O polinômio característico de Z-dovan (Generalização), em que z é a ordem da sequência estendida, é dado por:

$$P_{Z(x)} = x^{(z)} = x^{(z-2)} + x^{(z-3)} + x^{(z-4)} + \dots + x^{(z-z)}.$$

De acordo com os resultados apresentados para a fórmula de Binet das sequências vistas nas subseções anteriores, pode-se chegar à seguinte conclusão, referente à sequência de Z-dovan:

Definição 14. A fórmula de Binet de Z-dovan é dada por

$$F(n) = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n + \dots + Z(x_z)^n,$$

em que $n \in \mathbb{N}$, $A, B, C, \dots, Z$ são os coeficientes da função, e $x_1, x_2, x_3, \dots, x_z$ são as raízes do polinômio característico da sequência.

Os coeficientes deverão ser calculados de acordo com a ordem da extensão da sequência. Assim, para pentadovan existirão 6 coeficientes, hexadovan 7, heptadovan 8, e assim por diante. A quantidade de raízes se dará de forma semelhante.

Para a sequência de Z-dovan, seus termos também podem ser obtidos a partir de uma função geradora. Baseado nos cálculos das sequências anteriores, pode-se obter esta função de maneira semelhante (índice inteiro não positivo da sequência).

Definição 15. A função geradora de Z-dovan para o lado direito da sequência é descrita por

$$g(P_{Z(n)}, x) = \frac{1}{1 - \sum_{i=2}^z x^i},$$

em que z representa a ordem da sequência que irá variar de 3 até z .

Definição 16. A função geradora de Z-dovan para índice inteiro não positivo da sequência é

$$g(P_{Z(-n)}, x) = \frac{-\left(\sum_{i=0}^{z-2} x^i\right)}{x^{(z)} - \sum_{i=0}^{z-2} x^i},$$

sendo z representado pela ordem da sequência que irá variar de 3 até z .

Portanto, pode-se notar que a SP é um caso particular da sequência de Z-dovan, apresentando assim a sua sequência com os seus respectivos valores iniciais iguais a $P_0=1, P_1=0, P_2=1$. Assim, é possível utilizar a forma generalizada para obter as suas funções geradoras (termos positivos e negativos).

Nesta seção foram estudadas as sequências estendidas dos números de Padovan. De acordo com os principais resultados desta pesquisa, tem-se que os termos dessas sequências podem ser calculados elevando-se à n -ésima potência as suas respectivas matrizes Q , inclusive para a sequência generalizada.

Contudo, abordou-se, além da construção da matriz geradora Q , a fórmula de Binet e a função geradora para os termos de Padovan e as suas extensões, meios pelos quais é possível obter os termos da sequência de modo não recursivo.

Sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ - Z-Dovan

Doravante, apresentamos novas extensões da sequência (s, t) -Padovan e a generalização deste modelo matricial. A sequência (s_1, s_2) -Padovan é uma forma de visualização alternativa da sequência (s, t) -Padovan (CERDA-MORALES, 2017; DISKAYA; MENKEN, 2019). Também apresentamos a sequência (s_1, s_2, s_3) -Tridovan como passo até

alcançar a generalização deste processo investigativo matemático fundamentado no trabalho de Vieira, Alves e Catarino (2019c).

Uma sequência (s_1, s_2) -Padovan foi definida, primordialmente, por Cerda-Morales (2017), com base em trabalhos de Cıvıv e Tırkmen (2008) e Gulec e Taskara (2012), onde esta representa uma maneira de desenvolvermos uma matriz geradora da SP com a generalização dos coeficientes existentes na fórmula de recorrência da sequência.

Os termos $s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}$ variam de acordo com a extensão e a ordem da sequência, no caso dos números de Padovan, haverá apenas o s_1 e o s_2 . Entretanto, a generalização da SP, Z-dovan, terá $Z = z - 1$ termos, dependendo da ordem da sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan). Nesta seção serão definidas, de modo primordial, as sequências Matriciais $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ de Padovan, suas extensões, bem como a sua generalização.

Vale destacar que Cerda-Morales (2017) definiu esta sequência com os valores iniciais diferentes em relação aos valores padrões da SP, entretanto, neste trabalho, serão utilizados os mesmos valores definidos por Padovan ao criar a sequência.

Definição 17. Para $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$, a sequência (s_1, s_2) -Padovan, representada por $P_n(s_1, s_2)$ com $n \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, é definida pela fórmula de recorrência

$$P_{(n+3)(s_1, s_2)} = s_1 P_{(n+1)(s_1, s_2)} + s_2 P_{(n)(s_1, s_2)}.$$

com os valores iniciais $P_{(0)(s_1, s_2)} = 1$, $P_{(1)(s_1, s_2)} = 1$ e $P_{(2)(s_1, s_2)} = 1$. Para efeito de notação, será utilizado $P_{(n)(s_1, s_2)} = B_n$.

Teorema 25. A matriz geradora da sequência (s_1, s_2) -Padovan, para $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, é dada por

$$\mathbf{v}_3 Q_{(s_1, s_2)}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B_{n+2} & B_{n+1} & B_n \end{bmatrix}.$$

em que $\mathbf{V}_3$ representa o vetor linha, contendo os valores iniciais da SP.

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, tem-se:

Para $n = 1$, tem-se

$$\mathbf{v}_3 \mathcal{Q}_{(s_1, s_2)}^1 = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [s_1 + s_2 \quad 1 \quad 1] = [B_3 \quad B_2 \quad B_1].$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\mathbf{v}_3 \mathcal{Q}_{(s_1, s_2)}^k = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = [B_{k+2} \quad B_{k+1} \quad B_k].$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 \mathcal{Q}_{(s_1, s_2)}^{k+1} &= \mathbf{v}_3 \mathcal{Q}_{(s_1, s_2)}^k \mathcal{Q}_{(s_1, s_2)} = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [B_{k+2} \quad B_{k+1} \quad B_k] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [s_1 B_{k+1} + s_2 B_k \quad B_{k+2} \quad B_{k+1}] \\ &= [B_{k+3} \quad B_{k+2} \quad B_{k+1}]. \end{aligned}$$

A sequência (s_1, s_2, s_3) -Tridovan de quarta ordem ocorre por meio da combinação linear de quatro termos, sendo o primeiro coeficiente de valor igual a zero. Introduzido primordialmente neste trabalho e com suporte em Cerda-Morales (2017) e Vieira, Alves e Catarino (2019c), é então definida de acordo com a conjectura apresentada abaixo.

Definição 18. Para $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{Z}$, a sequência (s_1, s_2, s_3) -Tridovan, representada por $T_{(n)}(s_1, s_2, s_3)$ com $n \geq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, tem a seguinte fórmula de recorrência (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019c)

$$T_{(n+3)}(s_1, s_2, s_3) = s_1 T_{(n+1)}(s_1, s_2, s_3) + s_2 T_{(n)}(s_1, s_2, s_3) + s_3 T_{(n-1)}(s_1, s_2, s_3).$$

com os seguintes valores iniciais: $T_{(0)}(s_1, s_2, s_3) = 1$, $T_{(1)}(s_1, s_2, s_3) = 0$, $T_{(2)}(s_1, s_2, s_3) = 1$ e $T_{(3)}(s_1, s_2, s_3) = s_2 + s_3$ com $T_{(n)}(s_1, s_2, s_3) = T_{(n)}$.

Teorema 26. A matriz geradora da sequência (s_1, s_2, s_3) -Tridovan, representada $\Gamma_{(s_1, s_2, s_3)}^{(n)}$ para $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, é expressa por

$$\mathbf{v}_4 \Gamma_{(s_1, s_2, s_3)}^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 1 \\ s_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} T_{n+2} & T_{n+1} & T_n & T_{n-1} \end{bmatrix},$$

em que $\mathbf{v}_4$ é o vetor linha, contendo os valores iniciais da sequência de Tridovan.

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, obtêm-se:

Para $n = 1$, tem-se:

$$\mathbf{v}_4 \Gamma_{(s_1, s_2, s_3)}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 1 \\ s_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 + s_3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_3 & T_2 & T_1 & T_0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{Z}$, tem-se que:

$$\mathbf{v}_4 \Gamma_{(s_1, s_2, s_3)}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 1 \\ s_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} T_{k+2} & T_{k+1} & T_k & T_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_4 \Gamma_{(s_1, s_2, s_3)}^{(k+1)} &= \mathbf{v}_4 \Gamma_{(s_1, s_2, s_3)}^{(k)} \Gamma_{(s_1, s_2, s_3)} \\
 &= [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 1 \\ s_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 1 \\ s_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= [T_{k+2} \quad T_{k+1} \quad T_k \quad T_{k-1}] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 1 \\ s_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [s_1 T_{k+1} + s_2 T_k + s_3 T_{k-1} \quad T_{k+2} \quad T_{k+1} \quad T_k] \\
 &= [T_{k+3} \quad T_{k+2} \quad T_{k+1} \quad T_k].
 \end{aligned}$$

A fim de realizar a generalização desta sequência, são consideradas as relações utilizadas para as sequências expressas anteriormente, para assim alcançar a forma generalizada dessa sequência denominada $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan. Com suporte no trabalho de Alves (2015), em que a generalização da SF é realizada, definimos a generalização desta sequência.

Definição 19. Para $s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)} \in \square$, a sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$, denominada $Z_{(n)}(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ com $n..0$ e $n \in \square$, é definida por

$$\begin{aligned}
 Z_{(n+1)}(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}) &= s_1 Z_{(n)}(s_1, s_2, s_3, \dots, s_{(z-1)}) + s_2 Z_{(n-2)}(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}) + s_3 Z_{(n-3)}(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}) + \dots \\
 &+ s_{(z-1)} Z_{(n-z+1)}(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}) \\
 Z_{(n+1)}(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}) &= \sum_{i=1}^{z-1} s_i Z_{(n-i)}(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}).
 \end{aligned}$$

em que z representa a ordem da sequência.

Com isso, utilizaremos a notação $Z_{(n)}(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}) = Z_{(n)}$ e $s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)}$ representa a ordem da sequência.

Definição 20. Com $n..z-3$ e $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora da sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan, representada por $\zeta_{(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{s} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, tem-se:

$$\mathbf{v}_z \zeta_{(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})}^{(n)} = \begin{bmatrix} Z_{n+2} & Z_{n+1} & \dots & Z_{n-z+3} \end{bmatrix},$$

em que $\mathbf{v}_z$ representa o vetor linha, contendo os valores iniciais da sequência, $\mathbf{s}$ representa o vetor coluna, $\mathbf{I}$ a matriz de bloco dada pela matriz identidade e $\mathbf{0}$ o vetor linha, ambos de tamanho $z-1$.

É possível observar que a primeira linha da matriz representa o operador de acordo com a recorrência (ERCOLANO, 1979). Posteriormente, há uma matriz identidade logo abaixo, sendo expressa de acordo com o número de termos somados da sequência. E finalmente, uma coluna de zeros, variando de acordo com a ordem da sequência.

A partir da Definição 20, conclui-se que a generalização desta sequência pode ser facilmente calculada de acordo com a ordem da sequência. Assim, para o modelo de generalização apresentado, partindo da SP (ordem 3), pode-se chegar a uma perspectiva mais geral (ordem z).

A fórmula de Binet resulta em um método para obter os termos de uma sequência, sem necessitar da recorrência definida, existindo a obrigação de conhecer o polinômio característico de sequência analisada.

Definição 21. O polinômio na forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ pode ser expresso por

$$a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

sendo C_1, C_2 os coeficientes da função, r_1, r_2 as raízes da equação

$$r^2 + pr + q = 0, \text{ com } p, q \in \mathbb{N} \text{ e } r_1 \neq r_2.$$

Cerda-Morales (2017) e Diskaya e Menken (2019) definiram a equação característica da sequência (S_1, S_2) -Padovan como sendo $x^3 - sx - t = 0$. No entanto, Vieira, Alves e Catarino (2019c) definiram-na usando outras variáveis, S_1, S_2 .

Definição 22. Fundamentada na sua recorrência (ver Definição 17), a equação característica da sequência (S_1, S_2) -Padovan é definida como (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019c; DISKAYA; MENKEN, 2019)

$$x^3 = s_1x - s_2 \Rightarrow x^3 - s_1x - s_2 = 0,$$

onde $S_1, S_2 \in \mathbb{Z}$, resultando numa raiz real, e as outras duas sendo números complexos e conjugados. Assim, r_1, r_2, r_3 são as raízes dessa equação, em que

$$r_1 = A + B,$$

$$r_2 = -\frac{1}{2}(A + B) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(A - B),$$

$$r_3 = -\frac{1}{2}(A + B) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(A - B),$$

$$A = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}, B = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}, \Delta = \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{3}\right)^3.$$

Com essa definição e o Teorema 21, pode-se facilmente chegar à fórmula de Binet da sequência (S_1, S_2) -Padovan.

Teorema 27. Para $n \in \mathbb{Z}$, tem-se que a fórmula de Binet da sequência (S_1, S_2) -Padovan é expressa por (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019c)

$$Q_{(S_1, S_2)}^{(n)} = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + C_3 r_3^n,$$

onde C_1, C_2, C_3 são os coeficientes da função, r_1, r_2, r_3 as raízes da equação característica e $27s_2^2 - 4s_1^3 \neq 0$ a condição para os coeficientes S_1, S_2 da fórmula de recorrência.

Demonstração. De posse da fórmula de recorrência da sequência (S_1, S_2) -Padovan (Definição 17), com os valores iniciais definidos e a sua equação característica (Definição 22) com raízes r_1, r_2, r_3 , pode-se obter, através da resolução do sistema linear de equações, os valores dos coeficientes C_1, C_2, C_3 .

O discriminante $\Delta = \frac{(-s_2)^2}{4} + \frac{(-s_1)^3}{27}$, relativo ao polinômio de 3º grau, determina a forma como serão as raízes da equação. Portanto, quando $\Delta \neq 0$ todas as raízes serão distintas, chegando-se facilmente à conclusão de que $27s_2^2 - 4s_1^3 \neq 0$. De fato, se a condição não existir, não há os coeficientes indicados acima, visto que as raízes são iguais, então não haverá nenhuma fórmula Binet. Note-se também que $r_1 r_2 r_3 = s_2$ e que $r_1 + r_2 + r_3 = 0$. Por fim, essa condição implica que quando $s_2 \neq 0$, haverá pelo menos uma raiz igual a zero. Logo, não haverá a fórmula Binet para este caso.

Além disso, será explorada a equação característica e a fórmula de Binet da sequência (S_1, S_2, S_3) -Tridovan, fundamentada na sequência (S_1, S_2) -Padovan.

Definição 23. A equação característica da sequência (S_1, S_2, S_3) -Tridovan é definida baseada na recorrência (ver Definição 18), resultando em (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019c):

$$x^4 = s_1 x^2 + s_2 x + s_3 \Rightarrow x^4 - s_1 x^2 - s_2 x - s_3 = 0,$$

em que $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$, r_1, r_2, r_3, r_4 são as raízes, e

$$r_1 = -s + \frac{1}{2} \sqrt{-4s^2 - 2p + \frac{q}{s}},$$

$$r_2 = -s - \frac{1}{2} \sqrt{-4s^2 - 2p + \frac{q}{s}},$$

$$r_3 = s + \frac{1}{2} \sqrt{-4s^2 - 2p - \frac{q}{s}},$$

$$r_4 = s - \frac{1}{2} \sqrt{-4s^2 - 2p - \frac{q}{s}},$$

$$p = -8s_1, q = -s_2, S = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}\left(Q + \frac{\Delta_0}{Q}\right)},$$

$$Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + (\sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3})}{2}}, \Delta_0 = s_1^2 - 12s_3, \Delta_1 = -2s_1^3 + 27s_2^2 - 72s_1s_3.$$

Teorema 28. Para $n \in \mathbb{N}$, tem-se que a fórmula de Binet da sequência (S_1, S_2, S_3) -Tridovan é dada por (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2019c)

$$\Gamma_{(s_1, s_2, s_3)}^{(n)} = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + C_3 r_3^n + C_4 r_4^n,$$

em que C_1, C_2, C_3, C_4 são os coeficientes da função, r_1, r_2, r_3, r_4 as raízes da equação característica. Assim $s_3 \neq 0$ e $\Delta < 0$ ou $(\Delta > 0$ e $P < 0$ e $D < 0)$ onde $\Delta = s_2^2 \cdot (4s_1^3 - 27s_2^2) - 16s_3(16s_3^2 + 8s_1^2s_3 + 9s_1s_2^2 + s_1^4)$, $P = -8s_1$ e $\ddot{u} = -64s_3 - 16s_1$.

Demonstração. Através da recorrência da sequência (s_1, s_2, s_3) -Tridovan (Definição 18), com os valores iniciais definidos e a sua equação característica (Definição 23) com raízes r_1, r_2, r_3, r_4 , pode-se obter, através da resolução do sistema linear de equações, os valores dos coeficientes C_1, C_2, C_3, C_4 .

Existe ainda uma condição, que é obtida a partir do princípio de que todas as raízes devem ser distintas $\Delta < 0$ ou $\Delta > 0$ com $P < 0$ e $D < 0$. A partir da equação geral de quarta ordem, representada por $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, em que a, b, c, d, e são os coeficientes da equação, tendo que o discriminante Δ é obtido pela fórmula (REES, 1992).

$$\Delta = 256a^3e^3 - 192a^2bd^2 - 128a^2c^2e^2 + 144a^2cd^2e - 27a^2d^4 + 144ab^2ce^2 - 6ab^2d^2e$$

$$- 80abc^2de + 18abcd^3 + 16ac^4e - 4ac^3d^2$$

$$- 27b^4e^2 + 18b^3cde - 4b^3d^3 - 4b^2c^3e + b^2c^2d^2.$$

Portanto:

$$\Delta = s_2^2(4s_1^3 - 27s_2^2) - 16s_3(16s_3^2 + 8s_1^2s_3 + 9s_1s_2^2 + s_1^4).$$

Os parâmetros P e D são obtidos pela fórmula

$$P = 8ac - 3b^2 = -8s_1,$$

$$D = 64a^3e - 16a^2c^2 + 16ab^2c - 16a^2bd - 3b^4 = -64s_3 - 16s_1.$$

Assim: $-8s_1 > 0$ e $-64s_3 - 16s_1 > 0$.

O produto das raízes $r_1r_2r_3r_4 = s_3$ e a soma das raízes $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$, implicam que o termo $s_3 \neq 0$, para que a existência da fórmula de Binet seja possível.

Definição 24. A equação característica da sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan é nomeada de acordo com a Definição 19, sendo:

$$x_z = z^1 x_{(z-5)} + z^5 x_{(z-3)} + \dots + z^{(z)} x_{(z-z)} \Rightarrow x_z - z^1 x_{(z-5)} - z^5 x_{(z-3)} - \dots - z^{(z)} x_{(z-z)} = 0$$

$$x^z - \left(\sum_{j=1}^{z-1} s_j x^{z-j-1} \right) = 0,$$

em que $s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)} \in \mathbb{Q}$, $r_1, r_2, r_3, \dots, r_z$ são as raízes, onde, para se realizar o cálculo das raízes da equação característica a partir do 5º, é necessária utilização de algum recurso computacional.

Definição 25. Para $n \in \mathbb{Q}$, tem-se que a fórmula de Binet da sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan é dada por

$$\zeta_{(s_1, s_2, \dots, s_z)}^{(n)} = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + \dots + C_z r_z^n,$$

em que $C_1, C_2, \dots, C_z$ são os coeficientes da função, $r_1, r_2, \dots, r_z$ as raízes da equação característica.

O discriminante e as raízes da equação devem ser diferentes de zero. Isso pode ser facilmente verificado calculando-se os coefi-

cientes da fórmula de Binet com o determinante de Vandermonde (BJÖRCK; PEREYRA, 1970; HORN; JOHNSON, 1994), conforme apresentado abaixo:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_z \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_z^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^z & r_2^z & \dots & r_z^z \end{bmatrix} = \prod_{z \geq i > j \geq 2} (r_i - r_j).$$

O discriminante deve ser realizado de acordo com a ordem das equações, e se uma raiz for igual a outra, o determinante será igual a 0. Logo, não haverá fórmula Binet para a extensão da sequência da matriz.

Para moldar o produto raízes da equação da sequência $(S_1, S_2, \dots, S_{(z-1)})$ -Z-dovan, tem-se que $r_1 r_2 \dots r_z = S_{(z-1)}$ e $r_1 + r_2 + \dots + r_z = 0$. Com isso, é possível concluir que $S_{(z-1)} \neq 0$, pois se essa condição for negativa, a fórmula de Binet não existirá.

A fórmula de Binet pode ser aplicada para a sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan desde que as condições propostas sejam atendidas.

Já para a obtenção da função geradora, tem-se que uma função geradora consiste em resolver recorrências lineares cujos coeficientes sejam constantes (KOSHY, 2001). Esta técnica demonstrou um método de realizar o cálculo para obter os termos de uma sequência, sem precisar conhecer os seus elementos antecessores.

Teorema 29. A função geradora da sequência (S_1, S_2) -Padovan, em que $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$g(P_{(n)(s_1, s_2)}, x) = \frac{1+x}{1-s_1 x^2 - s_2 x^3}.$$

Demonstração. Para números de Padovan, esta função é multiplicada por s_1x^2, s_2x^3 nas equações abaixo, devido à sua relação de recorrência.

Assim, para a sequência (S_1, s_2) -Padovan, onde $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, e $P_{(n)(s_1, s_2)}$, tem-se que:

$$g(P_{(n)(s_1, s_2)}, x) = P_0 + P_1x + P_2x^2 + P_3x^3 + P_4x^4 + \dots \quad (1.28)$$

$$s_1x^2g(P_{(n)(s_1, s_2)}, x) = s_1P_0x^2 + s_1P_1x^3 + s_1P_2x^4 + s_1P_3x^5 + s_1P_4x^6 + \dots \quad (1.29)$$

$$s_2x^3g(P_{(n)(s_1, s_2)}, x) = s_2P_0x^3 + s_2P_1x^4 + s_2P_2x^5 + s_2P_3x^6 + s_2P_4x^7 + \dots \quad (1.30)$$

Com base na Equação (1.28-1.29-1.30), tem-se que:

$$g(P_{(n)(s_1, s_2)}, x)(1 - s_1x^2 - s_2x^3) = P_0 + P_1x + (P_2 - P_0)x^2$$

$$g(P_{(n)(s_1, s_2)}, x)(1 - s_1x^2 - s_2x^3) = 1 + x$$

$$g(P_{(n)(s_1, s_2)}, x) = \frac{1 + x}{1 - s_1x^2 - s_2x^3}.$$

Através da série de Taylor, em que se apresenta a divisão direta da função geradora, é possível obter os termos de uma sequência. Dessa forma, o expoente da variável x representa a posição do termo da sequência, e o seu respectivo coeficiente representa o termo da sequência, fundamentado no trabalho de Meyer e Rubinfeld (2005).

De modo similar, será realizada a investigação de outro teorema para a sequência (s_1, s_2, s_3) -Tridovan, de maneira análoga ao trabalho de Vieira, Alves e Catarino (2019c), apenas alterando-se os valores iniciais.

Teorema 30 A função geradora da sequência (s_1, s_2, s_3) -Tridovan para $n \in \mathbb{N}$ é dada por:

$$g(T_{(n)}, x) = \frac{1}{1 - s_1x^2 - s_2x^3 - s_3x^4}.$$

Demonstração. A função $g(T_{(n)}, x)$ é multiplicada por s_1x^2, s_2x^3 e s_3x^4 , de acordo com a fórmula de recorrência (Definição 18), em que $T_{(0)} = 1, T_{(1)} = 0, T_{(2)} = 1, T_{(3)} = s_2 + s_3$, e $T_{(n)(s_1, s_2, s_3)}$. Assim, tem-se:

$$g(T_{(n)(s_1, s_2, s_3)}, x) = T_{(0)} + T_{(1)}x + T_{(2)}x^2 + T_{(3)}x^3 + T_{(4)}x^4 + \dots \quad (1.31)$$

$$s_1x^2g(T_{(n)(s_1, s_2, s_3)}, x) = s_1T_{(0)}x^2 + s_1T_{(1)}x^3 + s_1T_{(2)}x^4 + s_1T_{(3)}x^5 + s_1T_{(4)}x^6 + \dots \quad (1.32)$$

$$s_2x^3g(T_{(n)(s_1, s_2, s_3)}, x) = s_2T_{(0)}x^3 + s_2T_{(1)}x^4 + s_2T_{(2)}x^5 + s_2T_{(3)}x^6 + s_2T_{(4)}x^7 + \dots \quad (1.33)$$

$$s_3x^4g(T_{(n)(s_1, s_2, s_3)}, x) = s_3T_{(0)}x^4 + s_3T_{(1)}x^5 + s_3T_{(2)}x^6 + s_3T_{(3)}x^7 + s_3T_{(4)}x^8 + \dots \quad (1.34)$$

De acordo com a equação (1.31-1.32-1.33-1.34), percebe-se que

$$g(T_{(n)(s_1, s_2, s_3)}, x)(1 - s_1x^2 - s_2x^3 - s_3x^4) = T_{(0)} + T_{(1)}x + (T_{(2)} - T_{(0)})x^2 + (T_{(3)} - s_1T_{(1)} - s_2T_{(0)})x^3$$

$$g(T_{(n)(s_1, s_2, s_3)}, x)(1 - s_1x^2 - s_2x^3 - s_3x^4) = 1$$

$$g(T_{(n)(s_1, s_2, s_3)}, x) = \frac{1}{1 - s_1x^2 - s_2x^3 - s_3x^4}.$$

Dados os resultados referentes às funções geradoras das sequências anteriores, pode-se obter a função geradora da sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan.

Definição 26. A função geradora da sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan para $n \in \mathbb{N}$ onde $Z_{(n)(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})} = Z_{(n)}$ é dada por:

$$g(Z_{(n)}, x) = \frac{x}{1 - \left(\sum_{i=1}^{z-1} s_i x^{i+1} \right)},$$

em que Z representa a ordem da sequência. Para esta definição, utiliza-se, no caso da SP, a sequência com os valores iniciais iguais a $P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = 1$.

Contudo, pode-se concluir que a SP é um caso particular da sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan, que é obtida depois de atribuir os valores iguais a 1 para as variáveis definidas por s_1, s_2 .

Relações recorrentes Bi, Tri e N-dimensionais

De maneira sucinta, quando se tem os elementos do tipo $a + bi$, em que a e b são os termos da SP, adequando-se à notação geral descrita na forma $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}i$, para um índice $n \in \mathbb{N}$, destacando-se a unidade imaginária i , em que $i^2 = -1$, pode-se avistar essa representação como um número complexo de Padovan (HARMAN, 1981). Com isso, de agora em diante, serão abordados mais elementos sobre este assunto.

De modo semelhante ao que Oliveira, Alves e Paiva (2017) e Vieira, Alves e Catarino (2019b) realizaram para a SF e para a sequência de Leonardo respectivamente, esta subseção discutirá algumas propriedades inerentes às relações bidimensionais oriundas da recorrência da SP ($P(n) = P(n-2) + P(n-3)$).

É possível também obter o seguinte plano de coordenadas das equações de recorrência, portanto, quaisquer $n \times m$ são válidos para todos os casos em ambos os eixos (ver Tabela 5).

Tabela 5 - Plano de Padovan bidimensional para os valores iniciais.

5	$3 + 2i$	$3 + 2i$	$3 + 2i$	$6 + 4i$	$6 + 4i$	$9 + 6i$
4	$2 + 2i$	$2 + 2i$	$2 + 2i$	$4 + 4i$	$4 + 4i$	$6 + 6i$
3	$2 + i$	$2 + i$	$2 + i$	$4 + 2i$	$4 + 2i$	$6 + 3i$
2	$1 + i$	$1 + i$	$1 + i$	$2 + 2i$	$2 + 2i$	$3 + 3i$
1	$1 + i$	$1 + i$	$1 + i$	$2 + 2i$	$2 + 2i$	$3 + 3i$
0	1	1	1	2	2	3
$n \times m$	0	1	2	3	4	5

Fonte: Elaborado pelos autores

Definição 27. Os números da forma $P(n, m)$ representarão os números da SP bidimensional e, devem satisfazer às seguintes condições bidimensionais de recorrência, em que $m, n, \in \mathbb{N}$:

$$P(n, m) = P(n-2, m) + P(n-3, m) \text{ e } P(n, m) = P(n, m-2) + P(n, m-3).$$

Com os seguintes valores iniciais definidos:

$$P(0, 0) = 1, P(1, 0) = 1, P(2, 0) = 1, P(0, 1) = 1 + i, P(0, 2) = 1 + i, P(1, 1) = 1 + i, P(1, 2) = 1 + i, \\ P(2, 1) = 1 + i, P(2, 2) = 1 + i \text{ em que } i^2 = -1 \text{ e } P(0) = P(1) = P(2) = 1, P(-1) = 0.$$

Lema 1. Valem as seguintes propriedades:

$$(a) P(n, 0) = P(n),$$

$$(b) P(0, m) = P(m) + P(m-1)i,$$

$$(c) P(n, 1) = P(n) + P(n)i,$$

$$(d) P(1, m) = P(m) + P(m-1)i.$$

Demonstração. (a) Sendo $P(n, m) = P(n-2, m) + P(n-3, m)$ e os valores iniciais $P(0, 0) = 1 = P(0)$, $P(1, 0) = 1 = P(1)$, $P(2, 0) = 1 = P(2)$ e aplicando-se o segundo princípio da indução finita sobre n , onde fixa $m=0$ e varia $n=0, 1, 2, \dots$. Observe:

$$P(n, 0) = P(n-2, 0) + P(n-3, 0):$$

$$P(3, 0) = P(1, 0) + P(0, 0) = 2 = P(3);$$

$$P(4, 0) = P(2, 0) + P(1, 0) = 2 = P(4);$$

$$P(5, 0) = P(3, 0) + P(2, 0) = 3 = P(5);$$

$$P(6, 0) = P(4, 0) + P(3, 0) = 4 = P(6);$$

$\vdots$

$$P(n-3, 0) = P(n-5, 0) + P(n-6, 0) = P(n-3);$$

$$P(n-2, 0) = P(n-4, 0) + P(n-5, 0) = P(n-2);$$

$$P(n-1, 0) = P(n-3, 0) + P(n-4, 0) = P(n-1);$$

$$P(n, 0) = P(n-2, 0) + P(n-3, 0) = P(n-2) + P(n-3) = P(n).$$

Desse modo, verifica-se que vale a propriedade (a) $P(n, 0) = P(n)$.

De modo análogo, pode-se provar a validade (b) $P(0, m) = P(m) + P(m-1)i$, considerando a relação $P(n, m) = P(n, m-2) + P(n, m-3)$ para $P(0, 0) = 1 = P(0)$, $P(1, 0) = 1 = P(1)$, $P(2, 0) = 1 = P(2)$, $P(0, 1) = 1 + i$, $P(0, 2) = 1 + i$ analisando a recursividade para $n=0$ e variando $m=0, 1, 2, 3, \dots$. Percebe-se que:

$$\begin{aligned}
P(0, m) &= P(0, m-2) + P(0, m-3): \\
P(0, 3) &= P(0, 1) + P(0, 0) = 2 + i = P(3) + P(2)i; \\
P(0, 4) &= P(0, 2) + P(0, 1) = 2 + 2i = P(4) + P(3)i; \\
P(0, 5) &= P(0, 3) + P(0, 2) = 3 + 2i = P(5) + P(4)i; \\
P(0, 6) &= P(0, 4) + P(0, 3) = 4 + 3i = P(6) + P(5)i; \\
&\vdots \\
P(0, m-3) &= P(0, m-5) + P(0, m-6) = P(m-3) + P(m-4)i; \\
P(0, m-2) &= P(0, m-4) + P(0, m-5) = P(m-2) + P(m-3)i; \\
P(0, m-1) &= P(0, m-3) + P(0, m-4) = P(m-1) + P(m-2)i; \\
P(0, m) &= P(0, m-2) + P(0, m-3) = P(m-2) + P(m-3)i + P(m-3) + P(m-4)i \\
&= P(m) + P(m-1)i.
\end{aligned}$$

Demonstrando a propriedade (b) $P(0, m) = P(m) + P(m-1)i$.

Seguindo o mesmo princípio da indução, demonstra-se a propriedade $P(n, 1) = P(n) + P(n+1)i$ (c), relacionando $P(n, m) = P(n-2, m) + P(n-3, m)$ e para os valores iniciais $P(0) = P(1) = P(2) = 1$, $P(0, 1) = 1 + i$, $P(1, 1) = 1 + i$, $P(2, 1) = 1 + i$, fixando $m = 1$ e variando $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Segue que:

$$\begin{aligned}
P(n, 1) &= P(n-2, 1) + P(n-3, 1): \\
P(3, 1) &= P(1, 1) + P(0, 1) = 2 + 2i = P(3) + P(3)i; \\
P(4, 1) &= P(2, 1) + P(1, 1) = 2 + 2i = P(4) + P(4)i; \\
P(5, 1) &= P(3, 1) + P(2, 1) = 3 + 3i = P(5) + P(5)i; \\
P(6, 1) &= P(4, 1) + P(3, 1) = 4 + 4i = P(6) + P(6)i; \\
&\vdots \\
P(n-3, 1) &= P(n-5, 1) + P(n-6, 1) = P(n-3) + P(n-3)i; \\
P(n-2, 1) &= P(n-4, 1) + P(n-5, 1) = P(n-2) + P(n-2)i; \\
P(n-1, 1) &= P(n-3, 1) + P(n-4, 1) = P(n-1) + P(n-1)i; \\
P(n, 1) &= P(n-2, 1) + P(n-3, 1) = P(n-2) + P(n-2)i + P(n-3) + P(n-3)i \\
&= P(n) + P(n)i.
\end{aligned}$$

Provando que (c) $P(n, 1) = P(n) + P(n)i$.

Por fim, analogamente segue a prova de (d) $P(1, m) = P(m+1) + P(m)i$, considerando a relação $P(n, m) = P(n, m-2) + P(n, m-3)$ e os valores $P(0) = P(1) = P(2) = 1, P(1, 0) = 1, P(1, 1) = 1+i, P(1, 2) = 1+i$ fixando $n = 1$ e variando $m = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Note que:

$$\begin{aligned}
 P(1, m) &= P(1, m-2) + P(1, m-3): \\
 P(1, 3) &= P(1, 1) + P(1, 0) = 2 + i = P(3) + P(2)i; \\
 P(1, 4) &= P(1, 2) + P(1, 1) = 2 + 2i = P(4) + P(3)i; \\
 P(1, 5) &= P(1, 3) + P(1, 2) = 3 + 2i = P(5) + P(4)i; \\
 P(1, 6) &= P(1, 4) + P(1, 3) = 4 + 3i = P(6) + P(5)i; \\
 &\vdots \\
 P(1, m-3) &= P(1, m-5) + P(1, m-6) = P(m-3) + P(m-4)i; \\
 P(1, m-2) &= P(1, m-4) + P(1, m-5) = P(m-2) + P(m-3)i; \\
 P(1, m-1) &= P(1, m-3) + P(1, m-4) = P(m-1) + P(m-2)i; \\
 P(1, m) &= P(1, m-2) + P(1, m-3) \\
 &= P(m-2) + P(m-3)i + P(m-3) + P(m-4)i
 \end{aligned}$$

Demonstrando assim a última propriedade (d) $P(1, m) = P(m) + P(m-1)i$.

Teorema 31. Para os dois inteiros, $n, m \in \mathbb{N}$, os números na forma $P(n, m)$ são descritos por:

$$P(n, m) = (P(n)P(m)) + (P(n)P(m-1))i.$$

Demonstração. Fixando o valor do número natural n , pode-se realizar a demonstração através de indução sobre m . Para o valor de $m = 0$, existe a propriedade (b) $P(n, 0) = P(n)P(1) + P(n)P(-1)i = P(n)$ e $P(n, 1) = P(n)P(1) + P(n)P(0)i = P(n) + P(n)i$ (c), validadas anteriormente pelo Lema 1, onde $P(-1) = 0, P(0) = P(1) = P(2) = 1$, cujos valores iniciais são $P(0, 0) = 1, P(1, 0) = 1, P(2, 0) = 1, P(0, 1) = 1+i, P(1, 1) = 1+i, P(2, 1) = 1+i, P(0, 2) = 1+i, P(1, 2) = 1+i, P(2, 2) = 1+i$. Para isso, serão calculados alguns valores de $P(n, m)$, variando m .

Para $P(n, 2)$, utiliza-se a recorrência $P(n, m) = P(n, m-2) + P(n, m-3)$ com os valores iniciais $P(0, 0) = 1 = P(0), P(1, 0) = 1 = P(1), P(2, 0) = 1 = P(2)$,

$P(0,2)=1+i, P(1,2)=1+i, P(2,2)=1+i$, com $m=2$ fixo e $n=0,1,2,3,\dots$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 P(n,2) &= P(n-2,2) + P(n-3,2): \\
 P(3,2) &= P(1,2) + P(0,2) = 2 + 2i = P(3) + P(3)i; \\
 P(4,2) &= P(2,2) + P(1,2) = 2 + 2i = P(4) + P(4)i; \\
 P(5,2) &= P(3,2) + P(2,2) = 3 + 3i = P(5) + P(5)i; \\
 P(6,2) &= P(4,2) + P(3,2) = 4 + 4i = P(6) + P(6)i; \\
 &\vdots \\
 P(n-3,2) &= P(n-5,2) + P(n-6,2) = P(n-3) + P(n-3)i; \\
 P(n-2,2) &= P(n-4,2) + P(n-5,2) = P(n-2) + P(n-2)i; \\
 P(n-1,2) &= P(n-3,2) + P(n-4,2) = P(n-1) + P(n-1)i; \\
 P(n,2) &= P(n-2,2) + P(n-3,2) = \\
 &P(n-2) + P(n-2)i + P(n-3) + P(n-3)i = P(n) + P(n)i.
 \end{aligned}$$

Assim, $P(n,2) = P(n) + P(n)i$.

Fixando o valor de $m=3$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 P(n,3) &= P(n-2,3) + P(n-3,3): \\
 P(3,3) &= P(1,3) + P(0,3) = 4 + 2i = 2P(3) + P(3)i; \\
 P(4,3) &= P(2,3) + P(1,3) = 4 + 2i = 2P(4) + P(4)i; \\
 P(5,3) &= P(3,3) + P(2,3) = 6 + 3i = 2P(5) + P(5)i; \\
 P(6,3) &= P(4,3) + P(3,3) = 8 + 4i = 2P(6) + P(6)i; \\
 &\vdots \\
 P(n-3,3) &= P(n-5,3) + P(n-6,3) = 2P(n-3) + P(n-3)i; \\
 P(n-2,3) &= P(n-4,3) + P(n-5,3) = 2P(n-2) + P(n-2)i; \\
 P(n-1,3) &= P(n-3,3) + P(n-4,3) = 2P(n-1) + P(n-1)i; \\
 P(n,3) &= P(n-2,3) + P(n-3,3) \\
 &= 2P(n-2) + P(n-2)i + 2P(n-3) + P(n-3)i = 2P(n) + P(n)i.
 \end{aligned}$$

Contudo, supondo que para $m = 0, 1, 2, \dots, k-2$ sejam válidas as seguintes identidades descritas:

$$\begin{aligned}
 P(n, 0) &= P(n)1 + P(n)0i = P(n)P(0) + P(n)P(-1)i; \\
 P(n, 1) &= P(n)1 + P(n)1i = P(n)P(1) + P(n)P(0)i; \\
 P(n, 2) &= P(n)1 + P(n)1i = P(n)P(2) + P(n)P(1)i; \\
 P(n, 3) &= P(n)2 + P(n)1i = P(n)P(3) + P(n)P(2)i; \\
 &\vdots \\
 P(n, k-3) &= P(n)P(k-3) + P(n)P(k-4)iP(n, k-2) \\
 &= P(n)P(k-2) + P(n)P(k-3)i.
 \end{aligned}$$

Demonstrando para $m = k$, a partir da recorrência $P(n, k) = P(n, k-2) + P(n, k-3)$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 P(n, k) &= P(n, k-2) + P(n, k-3) \\
 P(n, k) &= P(n)P(k-2) + P(n)P(k-3)i \\
 &\quad + P(n)P(k-3) + P(n)P(k-4)i \\
 &= P(n)P(k) + P(n)P(k-1)i.
 \end{aligned}$$

Doravante, discutiremos as relações tridimensionais, de acordo com Harman (1981), onde este explica que os números denominados por $P(n, m)$ representam o conjunto dos Gaussianos Inteiros $(n, m) = n + mi$, sendo n e m inteiros. Assim, com o viés de verificar essa extensão dos termos da SP para uma dimensão complexa, as relações de recursividade do caso tridimensional para a SP serão explicadas.

Definição 28. Para a SP, considerando os seguintes valores iniciais, definidos como:

$P(0, 0, 0) = 1 = P(0), P(1, 0, 0) = 1 = P(1), P(2, 0, 0) = 1 = P(2), P(0, 1, 0) = 1 + i, P(0, 0, 1) = 1 + j,$
 $P(1, 1, 1) = 1 + i + j, P(0, 1, 1) = 1 + i + j, P(1, 0, 1) = 1 + j, P(1, 1, 0) = 1 + i, P(2, 1, 1) = 1 + i + j$
 $P(2, 1, 0) = 1 + i, P(0, 2, 0) = 1 + i, P(0, 2, 1) = 1 + i + j, P(1, 2, 0) = 1 + i, P(0, 0, 2) = 1 + j,$
 $P(0, 1, 2) = 1 + i + j, P(1, 0, 2) = 1 + j, P(1, 1, 2) = 1 + i + j, P(1, 2, 1) = 1 + i + j, P(0, 2, 2) = 1 + i + j$
e $P(2, 0, 1) = 1 + j$, em que $i^2 = j^2 = -1$, formando os números na forma

$P(n, m, p)$ satisfazendo às seguintes condições tridimensionais de recorrência, em que $n, m, p \geq 0$:

$$\begin{cases} P(n, m, p) = P(n - 2, m, p) + P(n - 3, m, p) \\ P(n, m, p) = P(n, m - 2, p) + P(n, m - 2, p) \\ P(n, m, p) = P(n, m, p - 2) + P(n, m, p - 3) \end{cases}$$

O seguinte plano de coordenadas pode ser obtido a partir de equações de recorrência, portanto, quaisquer $nxm \times p$ são válidos para todos os casos em ambos os eixos (ver Tabela 6, 7 e 8).

Tabela 6 - Plano de Padovan tridimensional para os valores iniciais para $p = 0$.

5	$3 + 2i$	$3 + 2i$	$3 + 2i$	$6 + 4i$	$6 + 4i$	$9 + 6i$
4	$2 + 2i$	$2 + 2i$	$2 + 2i$	$4 + 4i$	$4 + 4i$	$6 + 6i$
3	$2 + i$	$2 + i$	$2 + i$	$4 + 2i$	$4 + 2i$	$6 + 3i$
2	$1 + i$	$1 + i$	$1 + i$	$2 + 2i$	$2 + 2i$	$3 + 3i$
1	$1 + i$	$1 + i$	$1 + i$	$2 + 2i$	$2 + 2i$	$3 + 3i$
0	1	1	1	2	2	3
<i>nxm</i>	0	1	2	3	4	5

Fonte: Elaborado pelos autores

Tabela 7 - Plano de Padovan tridimensional para os valores iniciais para $p = 1$.

5	$3 + 2i + 3j$	$3 + 2i + 3j$	$3 + 2i + 3j$	$6 + 4i + 6j$	$6 + 4i + 6j$	$9 + 6i + 9j$
4	$2 + 2i + 2j$	$2 + 2i + 2j$	$2 + 2i + 2j$	$4 + 4i + 4j$	$4 + 4i + 4j$	$6 + 6i + 6j$
3	$2 + i + 2j$	$2 + i + 2j$	$2 + i + 2j$	$4 + 2i + 4j$	$4 + 2i + 4j$	$6 + 3i + 6j$
2	$1 + i + j$	$1 + i + j$	$1 + i + j$	$2 + 2i + 2j$	$2 + 2i + 2j$	$3 + 3i + 3j$
1	$1 + i + j$	$+ i + j$	$1 + i + j$	$2 + 2i + 2j$	$2 + 2i + 2j$	$3 + 3i + 3j$
0	$1 + j$	$1 + j$	$1 + j$	$2 + 2j$	$2 + 2j$	$3 + 3j$
<i>nxm</i>	0	1	2	3	4	5

Fonte: Elaborado pelos autores

Tabela 8 - Plano de Padovan tridimensional para os valores iniciais para $p = 2$.

5	$3+2i+3j$	$3+2i+3j$	$3+2i+3j$	$6+4i+6j$	$6+4i+6j$	$9+6i+9j$
4	$2+2i+2j$	$2+2i+2j$	$2+2i+2j$	$4+4i+4j$	$4+4i+4j$	$6+6i+6j$
3	$2+i+2j$	$2+i+2j$	$2+i+2j$	$4+2i+4j$	$4+2i+4j$	$6+3i+6j$
2	$1+i+j$	$1+i+j$	$1+i+j$	$2+2i+2j$	$2+2i+2j$	$3+3i+3j$
1	$1+i+j$	$1+i+j$	$1+i+j$	$2+2i+2j$	$2+2i+2j$	$3+3i+3j$
0	$1+j$	$+j$	$1+j$	$2+2j$	$2+2j$	$3+3j$
nxm	0	1	2	3	4	5

Fonte: Elaborado pelos autores

Lema 2. As seguintes propriedades são válidas para a SP:

- (a) $P(n, 0, 0) = P(n)$,
- (b) $P(n, 1, 1) = P(n) + P(n)i + P(n)j$,
- (c) $P(n, 1, 0) = P(n) + P(n)i$,
- (d) $P(n, 0, 1) = P(n) + P(n)j$.

Demonstração. Para demonstrar a propriedade (a) $P(n, 0, 0) = P(n)$, será considerada a relação $P(n, m, p) = P(n-2, m, p) + P(n-3, m, p)$ e os valores iniciais $P(0, 0, 0) = 1 = P(0)$, $P(1, 0, 0) = 1 = P(1)$, $P(2, 0, 0) = 1 = P(2)$. Assim, para $m = p = 0$, ou seja, $P(n, 0, 0) = P(n-2, 0, 0) + P(n-3, 0, 0)$, variando $n = (0, 1, 2, 3, \dots)$. Pode-se perceber que:

$$\begin{aligned}
 P(n, 0, 0) &= P(n-2, 0, 0) + P(n-3, 0, 0): \\
 P(3, 0, 0) &= P(1, 0, 0) + P(0, 0, 0) = 2 = P(3); \\
 P(4, 0, 0) &= P(2, 0, 0) + P(1, 0, 0) = 2 = P(4); \\
 P(5, 0, 0) &= P(3, 0, 0) + P(2, 0, 0) = 3 = P(5); \\
 P(6, 0, 0) &= P(4, 0, 0) + P(3, 0, 0) = 4 = P(6); \\
 &\vdots \\
 P(n-3, 0, 0) &= P(n-5, 0, 0) + P(n-6, 0, 0) = P(n-3); \\
 P(n-2, 0, 0) &= P(n-4, 0, 0) + P(n-5, 0, 0) = P(n-2); \\
 P(n-1, 0, 0) &= P(n-3, 0, 0) + P(n-4, 0, 0) = P(n-1); \\
 P(n, 0, 0) &= P(n-2, 0, 0) + P(n-3, 0, 0) = P(n-2) + P(n-3) = P(n).
 \end{aligned}$$

Agora, para validar a propriedade (b) $P(n,1,1) = P(n) + P(n)i + P(n)j$, utiliza-se a relação $P(n,m,p) = P(n-2,m,p) + P(n-3,m,p)$ com os valores iniciais $P(0) = 1, P(1) = P(2) = 1, P(1,1,1) = 1 + i + j, P(0,1,1) = 1 + i + jeP(2,1,1) = 1 + i + j$. Logo, a recursividade para $m = p = 1$, isto é, $P(n+2,1,1) = P(n,1,1) + P(n-1,1,1)$, onde $n = (0,1,2,3,\dots)$, é tal que:

$$\begin{aligned}
 P(n,1,1) &= P(n-2,1,1) + P(n-3,1,1): \\
 P(3,1,1) &= P(1,1,1) + P(0,1,1) = 2 + 2i + 2j = P(3) + P(3)i + P(3)j; \\
 P(4,1,1) &= P(2,1,1) + P(1,1,1) = 2 + 2i + 2j = P(4) + P(4)i + P(4)j; \\
 P(5,1,1) &= P(3,1,1) + P(2,1,1) = 3 + 3i + 3j = P(5) + P(5)i + P(5)j; \\
 P(6,1,1) &= P(4,1,1) + P(3,1,1) = 4 + 4i + 4j = P(6) + P(6)i + P(6)j; \\
 &\vdots \\
 P(n-3,1,1) &= P(n-5,1,1) + P(n-6,1,1) = P(n-3) + P(n-3)i + P(n-3)j; \\
 P(n-2,1,1) &= P(n-4,1,1) + P(n-5,1,1) = P(n-2) + P(n-2)i + P(n-2)j; \\
 P(n-1,1,1) &= P(n-3,1,1) + P(n-4,1,1) = P(n-1) + P(n-1)i + P(n-1)j; \\
 P(n,1,1) &= P(n-2,1,1) + P(n-3,1,1) \\
 &= P(n-2) + P(n-2)i + P(n-2)j + P(n-3) + P(n-3)i + P(n-3)j \\
 &= P(n) + P(n)i + P(n)j.
 \end{aligned}$$

Sendo assim, para a terceira propriedade (c) $P(n,1,0) = P(n) + P(n)i$ com $P(n,m,p) = P(n-2,m,p) + P(n-3,m,p)$, avaliando-se a recorrência para $m = 1$ e $p = 0$, ou seja, $P(n,1,0) = P(n-2,1,0) + P(n-3,1,0)$, onde $n = (0,1,2,3,\dots)$ com $P(0) = P(1) = P(2) = 1, P(1,1,0) = 1 + i, P(0,1,0) = 1 + i$ e $P(2,1,0) = 1 + i$. Logo:

$$\begin{aligned}
 P(n,1,0) &= P(n-2,1,0) + P(n-3,1,0): \\
 P(3,1,0) &= P(1,1,0) + P(0,1,0) = 2 + 2i = P(3) + P(3)i; \\
 P(4,1,0) &= P(2,1,0) + P(1,1,0) = 2 + 2i = P(4) + P(4)i; \\
 P(5,1,0) &= P(3,1,0) + P(2,1,0) = 3 + 3i = P(5) + P(5)i; \\
 P(6,1,0) &= P(4,1,0) + P(3,1,0) = 4 + 4i = P(6) + P(6)i; \\
 &\vdots \\
 P(n-3,1,0) &= P(n-5,1,0) + P(n-6,1,0) = P(n-3) + P(n-3)i; \\
 P(n-2,1,0) &= P(n-4,1,0) + P(n-5,1,0) = P(n-2) + P(n-2)i; \\
 P(n-1,1,0) &= P(n-3,1,0) + P(n-4,1,0) = P(n-1) + P(n-1)i; \\
 P(n,1,0) &= P(n-2,1,0) + P(n-3,1,0) \\
 &= P(n-2) + P(n-2)i + P(n-3) + P(n-3)i = P(n) + P(n)i.
 \end{aligned}$$

Por fim, utilizando a indução, pode-se demonstrar a propriedade (d) $P(n, 0, 1) = P(n) + P(n)j$. através da recorrência $P(n, m, p) = P(n-2, m, p) + P(n-3, m, p)$ para $m=0$ e $p=1$, isto é, $P(n+2, 0, 1) = P(n, 0, 1) + P(n-1, 0, 1)$ com a variação de $n = (0, 1, 2, 3, \dots)$, os valores iniciais $P(0) = P(1) = P(2) = 1, P(1, 0, 1) = 1 + j, P(0, 0, 1) = 1 + j$ e $P(2, 0, 1) = 1 + j$. Com isso, percebe-se que:

$$\begin{aligned}
 P(n, 0, 1) &= P(n-2, 0, 1) + P(n-3, 0, 1): \\
 P(3, 0, 1) &= P(1, 0, 1) + P(0, 0, 1) = 2 + 2j = P(3) + P(3)j; \\
 P(4, 0, 1) &= P(2, 0, 1) + P(1, 0, 1) = 2 + 2j = P(4) + P(4)j; \\
 P(5, 0, 1) &= P(3, 0, 1) + P(2, 0, 1) = 3 + 3j = P(5) + P(5)j; \\
 P(6, 0, 1) &= P(4, 0, 1) + P(3, 0, 1) = 4 + 4j = P(6) + P(6)j; \\
 &\vdots \\
 P(n-3, 0, 1) &= P(n-5, 0, 1) + P(n-6, 0, 1) = P(n-3) + P(n-3)j; \\
 P(n-2, 0, 1) &= P(n-4, 0, 1) + P(n-5, 0, 1) = P(n-2) + P(n-2)j; \\
 P(n-1, 0, 1) &= P(n-3, 0, 1) + P(n-4, 0, 1) = P(n-1) + P(n-1)j; \\
 P(n, 0, 1) &= P(n-2, 0, 1) + P(n-3, 0, 1) \\
 &= P(n-2) + P(n-2)j + P(n-3) + P(n-3)j = P(n) + P(n)j.
 \end{aligned}$$

De modo análogo, aplicando o segundo princípio indutivo sobre n nas relações recursivas, tem-se que $P(n, 0, 0) = P(n), P(n, 1, 1) = P(n) + P(n)i + P(n)j, P(n, 1, 0) = P(n) + P(n)i$ e $P(n, 0, 1) = P(n) + P(n)j$. Por indução, constata-se as propriedades em $\mathcal{P}$, como:

$$\begin{aligned}
 P(n, 0, 0) &= P(n), P(p, 1, 1) = P(p) + P(p)i + P(p)j, P(p, 1, 0) = P(p) + P(p)i \\
 \text{e } P(p, 0, 1) &= P(p) + P(p)j.
 \end{aligned}$$

Lema 3. Sejam válidas as seguintes propriedades:

- (a) $P(0, m, 0) = P(m) + P(m-1)i$,
- (b) $P(0, m, 1) = P(m) + P(m-1)i + P(m)j$,
- (c) $P(1, m, 0) = P(m) + P(m-1)i$,
- (d) $P(1, m, 1) = P(m) + P(m-1)i + P(m)j$.

Demonstração. (a) A partir da recorrência $P(n, m, p) = P(n, m-2, p) + P(n, m-3, p)$ e com os valores iniciais $P(0) = P(1) = P(2) = 1, P(0, 0, 0) = 1, P(0, 1, 0) = 1+i$ e $P(0, 2, 0) = 1+i$, pode-se aplicar o segundo princípio da indução sobre m em $n = p = 0$.

Assim, variando $m = 1, 2, 3, \dots, k$, percebe-se que:

$$\begin{aligned} P(0, m, 0) &= P(0, m-2, 0) + P(0, m-3, 0): \\ P(0, 3, 0) &= P(0, 1, 0) + P(0, 0, 0) = 2+i = P(3) + P(2)i; \\ P(0, 4, 0) &= P(0, 2, 0) + P(0, 1, 0) = 2+2i = P(4) + P(3)i; \\ P(0, 5, 0) &= P(0, 3, 0) + P(0, 2, 0) = 3+2i = P(5) + P(4)i; \\ P(0, 6, 0) &= P(0, 4, 0) + P(0, 3, 0) = 4+3i = P(6) + P(5)i; \\ &\vdots \\ P(0, k-3, 0) &= P(0, k-5, 0) + P(0, k-6, 0) = P(k-3) + P(k-4)i; \\ P(0, k-2, 0) &= P(0, k-4, 0) + P(0, k-5, 0) = P(k-2) + P(k-3)i; \\ P(0, k-1, 0) &= P(0, k-3, 0) + P(0, k-4, 0) = P(k-1) + P(k-2)i; \\ P(0, k, 0) &= P(0, k-2, 0) + P(0, k-3, 0) \\ &= P(k-2) + P(k-3)i + P(k-3) + P(k-4)i = P(k) + P(k-1)i. \end{aligned}$$

Validando a propriedade (a) $P(0, m, 0) = P(m) + P(m-1)i$.

(b) Sendo $P(n, m, p) = P(n, m-2, p) + P(n, m-3, p)$ e com $P(0) = P(1) = P(2) = 1, P(0, 0, 1) = 1+j, P(0, 1, 1) = 1+i+j, P(0, 2, 1) = 1+i+j$, de modo análogo ao realizado para a demonstração do item (a), segue o mesmo princípio sobre m em $n = 0$ e $p = 1$. Assim para $m = k$:

$$\begin{aligned} P(0, m, 1) &= P(0, m-2, 1) + P(0, m-3, 1): \\ P(0, 3, 1) &= P(0, 1, 1) + P(0, 0, 1) = 2+i+2j = P(3) + P(2)i + P(3)j; \\ P(0, 4, 1) &= P(0, 2, 1) + P(0, 1, 1) = 2+2i+2j = P(4) + P(3)i + P(4)j; \\ P(0, 5, 1) &= P(0, 3, 1) + P(0, 2, 1) = 3+2i+3j = P(5) + P(4)i + P(5)j; \end{aligned}$$

Validando a propriedade (b) $P(0, m, 1) = P(m) + P(m-1)i + P(m)j$.

(c) Sendo $P(n, m, p) = P(n, m-2, p) + P(n, m-3, p)$ e $P(0) = P(1) = P(2) = 1, P(1, 0, 0) = 1, P(1, 1, 0) = 1+i, P(1, 2, 0) = 1+i$, analogamente ao realizado anteriormente, segue o mesmo princípio sobre m em $n = 1$ e $p = 0$. Logo, para $m = k$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
P(1, m, 0) &= P(1, m-2, 0) + P(1, m-3, 0) : \\
P(1, 3, 0) &= P(1, 1, 0) + P(1, 0, 0) = 2 + i = P(3) + P(2)i; \\
P(1, 4, 0) &= P(1, 2, 0) + P(1, 1, 0) = 2 + 2i = P(4) + P(3)i; \\
P(1, 5, 0) &= P(1, 3, 0) + P(1, 2, 0) = 3 + 2i = P(5) + P(4)i; \\
P(1, 6, 0) &= P(1, 4, 0) + P(1, 3, 0) = 4 + 3i = P(6) + P(5)i; \\
&\vdots \\
P(1, k-3, 0) &= P(1, k-5, 0) + P(1, k-6, 0) = P(k-3) + P(k-4)i; \\
P(1, k-2, 0) &= P(1, k-4, 0) + P(1, k-5, 0) = P(k-2) + P(k-3)i; \\
P(1, k-1, 0) &= P(1, k-3, 0) + P(1, k-4, 0) = P(k-1) + P(k-2)i; \\
P(1, k, 0) &= P(1, k-2, 0) + P(1, k-3, 0) \\
&= P(k-2) + P(k-3)i + P(k-3) + P(k-4)i = P(k) + P(k-1)i.
\end{aligned}$$

Demonstrando a propriedade (c) $P(1, m, 0) = P(m) + P(m-1)i$.

(d) Sendo $P(n, m, p) = P(n, m-2, p) + P(n, m-3, p)$ e $P(0) = P(1) = P(2) = 1$, $P(1, 0, 1) = 1 + j$, $P(1, 1, 1) = 1 + i + j$, $P(1, 2, 1) = 1 + i + j$, de modo análogo segue o mesmo princípio sobre m em $n = p = 1$. Com isso, para $m = k$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
P(1, m, 1) &= P(1, m-2, 1) + P(1, m-3, 1) : \\
P(1, 3, 1) &= P(1, 1, 1) + P(1, 0, 1) = 2 + i + 2j = P(3) + P(2)i + P(3)j; \\
P(1, 4, 1) &= P(1, 2, 1) + P(1, 1, 1) = 2 + 2i + 2j = P(4) + P(3)i + P(4)j; \\
P(1, 5, 1) &= P(1, 3, 1) + P(1, 2, 1) = 3 + 2i + 3j = P(5) + P(4)i + P(5)j; \\
P(1, 6, 1) &= P(1, 4, 1) + P(1, 3, 1) = 4 + 3i + 4j = P(6) + P(5)i + P(6)j; \\
&\vdots \\
P(1, k-3, 1) &= P(1, k-5, 1) + P(1, k-6, 1) = P(k-3) + P(k-4)i + P(k-3)j; \\
P(1, k-2, 1) &= P(1, k-4, 1) + P(1, k-5, 1) = P(k-2) + P(k-3)i + P(k-2)j; \\
P(1, k-1, 1) &= P(1, k-3, 1) + P(1, k-4, 1) = P(k-1) + P(k-2)i + P(k-1)j; \\
P(1, k, 1) &= P(1, k-2, 1) + P(1, k-3, 1) \\
&= P(k-2) + P(k-3)i + P(k-2)j + P(k-3) + P(k-4)i + P(k-3)j \\
&= P(k) + P(k-1)i + P(k)j.
\end{aligned}$$

É então validada a propriedade (d) $P(1, m, 1) = P(m) + P(m-1)i + P(m)j$.

Lema 4. Valem as seguintes identidades:

- (a) $P(0, 0, p) = P(p) + P(p-1)j$,
- (b) $P(0, 1, p) = P(p) + P(p)i + P(p-1)j$,
- (c) $P(1, 0, p) = P(p) + P(p-1)j$,
- (d) $P(1, 1, p) = P(p) + P(p)i + P(p-1)j$.

Demonstração. (a) Sendo $P(n, m, p) = P(n, m, p-2) + P(n, m, p-3)$ com os valores iniciais $P(0) = P(1) = P(2) = 1$, $P(0, 0, 0) = 1$, $P(0, 0, 1) = 1 + j$, $P(0, 0, 2) = 1 + j$ e, aplicando-se o segundo princípio da indução sobre P para $n = m = 0$ e variando $p = 1, 2, 3, \dots, k$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 P(0, 0, p) &= P(0, 0, p-2) + P(0, 0, p-3): \\
 P(0, 0, 3) &= P(0, 0, 1) + P(0, 0, 0) = 2 + j = P(3) + P(2)j; \\
 P(0, 0, 4) &= P(0, 0, 2) + P(0, 0, 1) = 2 + 2j = P(4) + P(3)j; \\
 P(0, 0, 5) &= P(0, 0, 3) + P(0, 0, 2) = 3 + 2j = P(5) + P(4)j; \\
 P(0, 0, 6) &= P(0, 0, 4) + P(0, 0, 3) = 4 + 3j = P(6) + P(5)j; \\
 &\vdots \\
 P(0, 0, k-3) &= P(0, 0, k-5) + P(0, 0, k-6) = P(k-3) + P(k-4)j; \\
 P(0, 0, k-2) &= P(0, 0, k-4) + P(0, 0, k-5) = P(k-2) + P(k-3)j; \\
 P(0, 0, k-1) &= P(0, 0, k-3) + P(0, 0, k-4) = P(k-1) + P(k-2)j; \\
 P(0, 0, k) &= P(0, 0, k-2) + P(0, 0, k-3) \\
 &= P(k-2) + P(k-3)j + P(k-3) + P(k-4)j = P(k) + P(k-1)j.
 \end{aligned}$$

Sendo então validada a propriedade (a) $P(0, 0, p) = P(p) + P(p-1)j$.

(b) Sendo $P(n, m, p) = P(n, m, p-2) + P(n, m, p-3)$ com os valores iniciais $P(0) = P(1) = P(2) = 1$, $P(0, 1, 0) = 1 + i$, $P(0, 1, 1) = 1 + i + j$, $P(0, 1, 2) = 1 + i + j$ e aplicando-se o segundo princípio da indução sobre P para $n = 0$ e $m = 1$ e variando $p = 1, 2, 3, \dots, k$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
P(0,1,p) &= P(0,1,p-2) + P(0,1,p-3): \\
P(0,1,3) &= P(0,1,1) + P(0,1,0) = 2 + 2i + j = P(3) + P(3)i + P(2)j; \\
P(0,1,4) &= P(0,1,2) + P(0,1,1) = 2 + 2i + 2j = P(4) + P(4)i + P(3)j; \\
P(0,1,5) &= P(0,1,3) + P(0,1,2) = 3 + 3i + 2j = P(5) + P(5)i + P(4)j; \\
P(0,1,6) &= P(0,1,4) + P(0,1,3) = 4 + 4i + 3j = P(6) + P(6)i + P(5)j; \\
&\vdots \\
P(0,1,k-3) &= P(0,1,k-5) + P(0,1,k-6) = P(k-3) + P(k-3)i + P(k-4)j; \\
P(0,1,k-2) &= P(0,1,k-4) + P(0,1,k-5) = P(k-2) + P(k-2)i + P(k-3)j; \\
P(0,1,k-1) &= P(0,1,k-3) + P(0,1,k-4) = P(k-1) + P(k-1)i + P(k-2)j; \\
P(0,1,k) &= P(0,1,k-2) + P(0,1,k-3) \\
&= P(k-2) + P(k-2)i + P(k-3)j + P(k-3) + P(k-3)i + P(k-4)j \\
&= P(k) + P(k)i + P(k-1)j.
\end{aligned}$$

Sendo então validada a propriedade (b) $P(0,1,p) = P(p) + P(p)i + P(p-1)j$.

(c) Sendo $P(n,m,p) = P(n,m,p-2) + P(n,m,p-3)$ com os valores iniciais $P(0) = P(1) = P(2) = 1, P(1,0,0) = 1, P(1,0,1) = 1 + j, P(1,0,2) = 1 + j$ e aplicando-se o segundo princípio da indução sobre p para $n = 1$ e $m = 0$ e variando $p = 1, 2, 3, \dots, k$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
P(1,0,p) &= P(1,0,p-2) + P(1,0,p-3): \\
P(1,0,3) &= P(1,0,1) + P(1,0,0) = 2 + j = P(3) + P(2)j; \\
P(1,0,4) &= P(1,0,2) + P(1,0,1) = 2 + 2j = P(4) + P(3)j; \\
P(1,0,5) &= P(1,0,3) + P(1,0,2) = 3 + 2j = P(5) + P(4)j; \\
P(1,0,6) &= P(1,0,4) + P(1,0,3) = 4 + 3j = P(6) + P(5)j; \\
&\vdots \\
P(1,0,k-3) &= P(1,0,k-5) + P(1,0,k-6) = P(k-3) + P(k-4)j; \\
P(1,0,k-2) &= P(1,0,k-4) + P(1,0,k-5) = P(k-2) + P(k-3)j; \\
P(1,0,k-1) &= P(1,0,k-3) + P(1,0,k-4) = P(k-1) + P(k-2)j; \\
P(1,0,k) &= P(1,0,k-2) + P(1,0,k-3) \\
&= P(k-2) + P(k-3)j + P(k-3) + P(k-4)j = P(k) + P(k-1)j.
\end{aligned}$$

Validando a propriedade (c) $P(1,0,p) = P(p) + P(p-1)j$.

(d) Sendo $P(n,m,p) = P(n,m,p-2) + P(n,m,p-3)$ com os valores iniciais $P(0) = P(1) = P(2) = 1, P(1,1,0) = 1 + i, P(1,1,1) = 1 + i + j, P(1,1,2) = 1 + i + j$ e

aplicando-se o segundo princípio da indução sobre p para $n = m = 1$ e variando $p = 1, 2, 3, \dots, k$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 P(1, 1, p) &= P(1, 1, p-2) + P(1, 1, p-3): \\
 P(1, 1, 3) &= P(1, 1, 1) + P(1, 1, 0) = 2 + 2i + j = P(3) + P(3)i + P(2)j; \\
 P(1, 1, 4) &= P(1, 1, 2) + P(1, 1, 1) = 2 + 2i + 2j = P(4) + P(4)i + P(3)j; \\
 P(1, 1, 5) &= P(1, 1, 3) + P(1, 1, 2) = 3 + 3i + 2j = P(5) + P(5)i + P(4)j; \\
 P(1, 1, 6) &= P(1, 1, 4) + P(1, 1, 3) = 4 + 4i + 3j = P(6) + P(6)i + P(5)j; \\
 &\vdots \\
 P(1, 1, k-3) &= P(1, 1, k-5) + P(1, 1, k-6) = P(k-3) + P(k-3)i + P(k-4)j; \\
 P(1, 1, k-2) &= P(1, 1, k-4) + P(1, 1, k-5) = P(k-2) + P(k-2)i + P(k-3)j; \\
 P(1, 1, k-1) &= P(1, 1, k-3) + P(1, 1, k-4) = P(k-1) + P(k-1)i + P(k-2)j; \\
 P(1, 1, k) &= P(1, 1, k-2) + P(1, 1, k-3) \\
 &= P(k-2) + P(k-2)i + P(k-3)j + P(k-3) + P(k-3)i + P(k-4)j \\
 &= P(k) + P(k)i + P(k-1)j.
 \end{aligned}$$

Demonstrando a propriedade (d) $P(1, 1, p) = P(p) + P(p)i + P(p-1)j$.

Teorema 32. Para os três inteiros, $n, m, p \in \mathbb{N}$, os números na forma $P(n, m, p)$ são descritos por:

$$P(n, m, p) = P(n)P(m)P(p) + P(n)P(m-1)P(p)i + P(n)P(m)P(p-1)j.$$

Demonstração. Assim, para $m = 2$ com $P(0, 2, 0) = 1 + i, P(0, 2, 1) = 1 + i + j, P(0, 2, 2) = 1 + i + j$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 P(0, 2, 3) &= P(0, 2, 1) + P(0, 2, 0) = 2 + 2i + j = P(3) + P(3)i + P(2)j; \\
 P(0, 2, 4) &= P(0, 2, 2) + P(0, 2, 1) = 2 + 2i + 2j = P(4) + P(4)i + P(3)j; \\
 P(0, 2, 5) &= P(0, 2, 3) + P(0, 2, 2) = 3 + 3i + 2j = P(5) + P(5)i + P(4)j; \\
 P(0, 2, 6) &= P(0, 2, 4) + P(0, 2, 3) = 4 + 4i + 3j = P(6) + P(6)i + P(5)j; \\
 &\vdots \\
 P(0, 2, p-3) &= P(0, 2, p-5) + P(0, 2, p-6) = P(p-3) + P(p-3)i + P(p-4)j; \\
 P(0, 2, p-2) &= P(0, 2, p-4) + P(0, 2, p-5) = P(p-2) + P(p-2)i + P(p-3)j; \\
 P(0, 2, p-1) &= P(0, 2, p-3) + P(0, 2, p-4) = P(p-1) + P(p-1)i + P(p-2)j; \\
 P(0, 2, p) &= P(0, 2, p-2) + P(0, 2, p-3) \\
 &= P(p-2) + P(p-2)i + P(p-3)j + P(p-3) + P(p-3)i + P(p-4)j \\
 &= P(p) + P(p)i + P(p-1)j.
 \end{aligned}$$

Contudo, quando se estimula o comportamento das propriedades apresentadas anteriormente para $m = 1, 2, 3, \dots, k$ tem-se que:

$$\begin{aligned}
 P(0, 0, p) &= P(0)P(p) + P(-1)P(p)i + P(0)P(p-1)j; \\
 P(0, 1, p) &= P(1)P(p) + P(0)P(p)i + P(1)P(p-1)j; \\
 P(0, 2, p) &= P(2)P(p) + P(1)P(p)i + P(2)P(p-1)j; \\
 P(0, 3, p) &= P(3)P(p) + P(2)P(p)i + P(3)P(p-1)j; \\
 P(0, 4, p) &= P(4)P(p) + P(3)P(p)i + P(4)P(p-1)j; \\
 P(0, 5, p) &= P(5)P(p) + P(4)P(p)i + P(5)P(p-1)j; \\
 &\vdots \\
 P(0, k-3, p) &= P(0, k-5, p) + P(0, k-6, p) = P(k-3)P(p) \\
 &\quad + (P(k-4)P(p))i + (P(k-3)P(p-1))j; \\
 P(0, k-2, p) &= P(0, k-4, p) + P(0, k-5, p) = P(k-2)P(p) \\
 &\quad + (P(k-3)P(p))i + (P(k-2)P(p-1))j; \\
 P(0, k-1, p) &= P(0, k-3, p) + P(0, k-2, p) = P(k-1)P(p) \\
 &\quad + (P(k-2)P(p))i + (P(k-1)P(p-1))j; \\
 P(0, k, p) &= P(0, k-2, p) + P(0, k-3, p) = P(k-2)P(p) \\
 &\quad + (P(k-3)P(p))i + (P(k-2)P(p-1))j \\
 &\quad + P(k-3)P(p) + (P(k-4)P(p))i + (P(k-3)P(p-1))j \\
 &= P(k)P(p) + (P(k-1)P(p))i + (P(k)P(p-1))j.
 \end{aligned}$$

Com isso, prova-se a veracidade do Teorema 32, por meio da sua aplicação para $n = 1, 2, 3, \dots, k$, na situação apresentada a seguir:

$$\begin{aligned}
 P(1, m, p) &= P(1)P(m)P(p) + P(1)P(m-1)P(p)i + P(1)P(m)P(p-1)j; \\
 P(2, m, p) &= P(2)P(m)P(p) + P(2)P(m-1)P(p)i + P(2)P(m)P(p-1)j; \\
 P(3, m, p) &= P(3)P(m)P(p) + P(3)P(m-1)P(p)i + P(3)P(m)P(p-1)j; \\
 P(4, m, p) &= P(4)P(m)P(p) + P(4)P(m-1)P(p)i + P(4)P(m)P(p-1)j; \\
 P(5, m, p) &= P(5)P(m)P(p) + P(5)P(m-1)P(p)i + P(5)P(m)P(p-1)j; \\
 P(6, m, p) &= P(6)P(m)P(p) + P(6)P(m-1)P(p)i + P(6)P(m)P(p-1)j; \\
 &\vdots \\
 P(k-3, m, p) &= P(k-3)P(m)P(p) + P(k-3)P(m-1)P(p)i \\
 &\quad + P(k-3)P(m)P(p-1)j; \\
 P(k-2, m, p) &= P(k-2)P(m)P(p) + P(k-2)P(m-1)P(p)i \\
 &\quad + P(k-2)P(m)P(p-1)j; \\
 P(k-1, m, p) &= P(k-1)P(m)P(p) + P(k-1)P(m-1)P(p)i \\
 &\quad + P(k-1)P(m)P(p-1)j;
 \end{aligned}$$

As relações $\mathbb{n}$ -dimensionais foram baseadas nos trabalhos de Harman (1981) e Oliveira e Alves e Paiva (2017). Serão definidas as relações recorrentes $\mathbb{n}$ -Dimensionais da SP, designando-se assim uma expressão generalizada para os números hipercomplexos descritos na forma $P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)$, em que $\mathbb{n}$ representa as variáveis. Os números hipercomplexos são definidos na forma $a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n$ em que $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ representam os números reais e $i_1, i_2, \dots, i_n$ são os símbolos que representam as unidades imaginárias inseridas (KANTOR; SOLODOVNIKOV, 1989).

Definição 29. Seja $P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)$ um número hipercomplexo de Padovan, com $\mathbb{n}$ variáveis e $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n \in \mathbb{N}$, para $n \geq 3$, e o seguinte conjunto de unidades imaginárias ($\mu_1 = i, \mu_2 = j, \dots, \mu_n$). Desse modo, são definidos os valores iniciais a seguir:

$$\begin{aligned}
 P(0, 0, 0, \dots, 0) &= 0 \\
 P(1, 0, 0, \dots, 0) &= 1 \\
 P(0, 1, 0, \dots, 0) &= \mu_1 \\
 P(0, 0, 1, \dots, 0) &= \mu_2 \\
 P(0, 0, 0, 1, \dots, 0) &= \mu_3 \\
 P(0, 0, 0, 0, 1, \dots, 0) &= \mu_4 \\
 &\vdots \\
 P(0, 0, 0, \dots, 1) &= \mu_{n-1} \\
 P(1, 1, 1, \dots, 1) &= 1 + \mu_1 + \dots + \mu_n \\
 P(0, 1, 1, \dots, 1) &= \mu_1 + \dots + \mu_n \\
 P(1, 0, 1, \dots, 1) &= 1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\
 P(1, 1, 0, \dots, 1) &= 1 + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\
 &\vdots \\
 P(1, 1, 1, \dots, 1, 0) &= 1 + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Assim, os números na forma $P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)$ satisfazem às seguintes condições n -dimensionais de recorrência:

$$\begin{aligned}
P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n) &= P(n_1 - 2, n_2, n_3, \dots, n_n) + P(n_1 - 3, n_2, n_3, \dots, n_n) \\
P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n) &= P(n_1, n_2 - 2, n_3, \dots, n_n) + P(n_1, n_2 - 3, n_3, \dots, n_n) \\
P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n) &= P(n_1, n_2, n_3 - 2, \dots, n_n) + P(n_1, n_2, n_3 - 3, \dots, n_n) \\
&\vdots \\
P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n) &= P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n - 2) + P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n - 3).
\end{aligned}$$

Teorema 33. Os números na forma $P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)$, tal que $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n \in \mathbb{N}$, são determinados por:

$$\begin{aligned}
P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n) &= (P(n_1)P(n_2)P(n_3) \dots P(n_n)) + (P(n_1)P(n_2 - 1)P(n_3) \dots P(n_n))\mu_1 \\
&+ (P(n_1)P(n_2)P(n_3 - 1) \dots P(n_n))\mu_2 + \dots + (P(n_1)P(n_2)P(n_3) \dots P(n_n - 1))\mu_n.
\end{aligned}$$

Demonstração. Partindo das demonstrações realizadas nas subseções anteriores, em que são válidos os teoremas $P(n, m) = P(n)P(m) + P(n)P(m - 1)i$ e $P(n, m, p) = P(n)P(m)P(p) + P(n)P(m - 1)P(p)i + P(n)P(m)P(p - 1)j$. Dessa forma, por meio do passo indutivo, pode-se verificar que:

$$\begin{aligned}
P(n_1, n_2) &= P(n_1)P(n_2) + P(n_1)P(n_2 - 1)i \\
P(n_1, n_2, n_3) &= P(n_1)P(n_2)P(n_3) + P(n_1)P(n_2 - 1)P(n_3)i + P(n_1)P(n_2)P(n_3 - 1)j \\
P(n_1, n_2, n_3, n_4) &= P(n_1)P(n_2)P(n_3)P(n_4) + P(n_1)P(n_2 - 1)P(n_3)P(n_4)i + P(n_1)P(n_2)P(n_3 - 1)P(n_4)j \\
&+ P(n_1)P(n_2)P(n_3)P(n_4 - 1)k \\
&\vdots \\
P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n) &= (P(n_1)P(n_2)P(n_3) \dots P(n_n)) \\
&+ (P(n_1)P(n_2 - 1)P(n_3) \dots P(n_n))\mu_1 + (P(n_1)P(n_2)P(n_3 - 1) \dots P(n_n))\mu_2 \\
&+ \dots + (P(n_1)P(n_2)P(n_3) \dots P(n_n - 1))\mu_n.
\end{aligned}$$

Quatérnios de Padovan

Um quatérnio é uma extensão dos números complexos, estudados em Álgebra Linear, desenvolvidos em 1843 por William Rowan Hamilton (1805-1865). Há duas estruturas quaterniônicas, *a priori*: quatérnios em $\mathbb{H}$, possuindo componentes reais, e os quatérnios complexos (biquatérnios) em $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$, possuindo variáveis complexas. Os

quatérnios são compreendidos como somas formais de escalares com vetores usuais do espaço tridimensional, existindo quatro dimensões (OLIVEIRA, 2018).

Um quatérnio é descrito por: $q = a + bi + cj + dk$, onde a, b, c, d são números reais e i, j, k a parte ortogonal na base $\square^3$. Tem-se ainda que $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ e $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ são dois quatérnios distintos. Assim, as operações escalares de adição, igualdade e multiplicação entre eles são: $q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$. Sendo $q_1 = q_2$ apenas se $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$. E para $\alpha \in \square$, tem-se que $\alpha q_1 = \alpha a_1 + \alpha b_1i + \alpha c_1j + \alpha d_1k$.

Um número complexo é definido por $a + bi$, onde a e b são números reais e i é o número imaginário, não fazendo parte dos números reais, e possuindo a propriedade $i^2 = -1$. Assim, os quatérnios possuem quatro vetores de base $(1, i, j, k)$, existindo três componentes imaginários chamados i, j, k , em que essas são três raízes quadradas e diferentes (CATARINO, 2018).

Esse produto quaterniônico é apresentado por Horadam (1993), sendo $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ji, jk = i = -kj$ e $ki = j = -ik$. O conjugado e norma do quaternion são descritas, respectivamente, como:

$$q^* = a - bi - cj - dk,$$

$$N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

À vista disso, serão enunciadas algumas definições a respeito dos quatérnios de Padovan, a fórmula variante de Binet, função geradora, matriz geradora e algumas propriedades, tanto para os números naturais, como a sua extensão para índice inteiro não positivo.

Definição 30. O quatérnio de Padovan é definido, com $n..0, n \in \square, i^2 = j^2 = k^2 = -1$, pela equação (TASCI, 2018; DISKAYA; MENKEN, 2019):

$$QP_n = P_n + iP_{n+1} + jP_{n+2} + kP_{n+3}.$$

Definição 31. A fórmula de recorrência do quatérnio de Padovan é definida como:

$$QP_n = QP_{n-2} + QP_{n-3}.$$

Teorema 34. Para $n \in \mathbb{N}$, a fórmula de Binet para o quatérnio de Padovan é (TASCI, 2018; DISKAYA; MENKEN, 2019)

$$QP_n = Aax_1^n + Bbx_2^n + Ccx_3^n,$$

em que x_1, x_2, x_3 são as raízes da equação $x^3 - x - 1 = 0$, e:

$$A = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, B = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, C = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)},$$

$$a = 1 + x_1i + x_1^2j + x_1^3k, b = 1 + x_2i + x_2^2j + x_2^3k, c = 1 + x_3i + x_3^2j + x_3^3k.$$

Demonstração. De posse da fórmula $QP_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n$, pode-se utilizar a relação de recorrência dos quatérnios de Padovan (Definição 30) com os valores iniciais $QP_0 = 1 + i + j + 2k, QP_1 = 1 + i + 2j + 2k, QP_2 = 1 + 2i + 2j + 3k$. Assim, é desenvolvido o sistema de equações:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 1 + i + j + 2k \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 &= 1 + i + 2j + 2k \\ \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 &= 1 + 2i + 2j + 3k \end{cases}$$

Assim, resolvendo o sistema, tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(1 + 2i + 2j + 3k) - x_2(1 + i + 2j + 2k) - x_3(1 + i + 2j + 2k) + x_2x_3(1 + i + j + 2k)}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3} \\ &= \frac{(1 - x_2 - x_3 + x_2x_3) + i(2 - x_2 - x_3 + x_2x_3) + j(2 - 2x_2 - 2x_3 + x_2x_3) + k(3 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_2x_3)}{(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{(1+2i+2j+3k) - x_1(1+i+2j+2k) - x_3(1+i+2j+2k) + x_1x_3(1+i+j+2k)}{x_2^2 - x_2x_3 - x_1x_2 + x_1x_3} \\
&= \frac{(1-x_1-x_2+x_1x_3) + i(2-x_1-x_3+x_1x_3) + j(2-2x_1-2x_3+x_1x_3) + k(3-2x_1-2x_3+2x_1x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, \\
\gamma &= \frac{(1+2i+2j+3k) - x_1(1+i+2j+2k) - x_2(1+i+2j+2k) + x_1x_2(1+i+j+2k)}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3} \\
&= \frac{(1-x_1-x_2+x_1x_2) + i(2-x_1-x_2+x_1x_2) + j(2-2x_1-2x_2+x_1x_2) + k(3-2x_1-2x_2+2x_1x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.
\end{aligned}$$

Utilizando as relações de Girard: $x_1x_2x_3=1, x_1+x_2+x_3=0$ e $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-1$, e a fórmula de Binet da SP (Teorema 13), tem-se que:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{(x_2x_2 - x_2 - x_3 + 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} (1 + x_1i + x_1^2j + x_1^3k) = \frac{(x_2-1)(x_3-1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} (1 + x_1i + x_1^2j + x_1^3k) \\
&= A(1 + x_1i + x_1^2j + x_1^3k), \\
\beta &= \frac{(x_1x_3 - x_1 - x_3 + 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} (1 + x_2i + x_2^2j + x_2^3k) = \frac{(x_1-1)(x_3-1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} (1 + x_2i + x_2^2j + x_2^3k) \\
&= B(1 + x_2i + x_2^2j + x_2^3k), \\
\gamma &= \frac{(x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} (1 + x_3i + x_3^2j + x_3^3k) = \frac{(x_1-1)(x_2-1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} (1 + x_3i + x_3^2j + x_3^3k) \\
&= C(1 + x_3i + x_3^2j + x_3^3k).
\end{aligned}$$

Definindo $a = 1 + x_1 i + x_1^2 j + x_1^3 k, b = 1 + x_2 i + x_2^2 j + x_2^3 k, c = 1 + x_3 i + x_3^2 j + x_3^3 k$, pode-se chegar em:

$$\alpha = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} (1 + x_1 i + x_1^2 j + x_1^3 k) = Aa,$$

$$\beta = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} (1 + x_2 i + x_2^2 j + x_2^3 k) = Bb,$$

$$\gamma = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} (1 + x_3 i + x_3^2 j + x_3^3 k) = Cc.$$

Propriedade 3. A função geradora do quaternion de Padovan é dada por (TASCI, 2018):

$$g(QP_n, x) = \frac{(1 + i + j + 2k) + (1 + i + 2j + 2k)x + (i + j + k)x^2}{1 - x^2 - x^3}.$$

Demonstração. Multiplicando a função por x^2 e x^3 , tem-se:

$$g(QP_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} QP_n x^n = QP_0 + QP_1 x + QP_2 x^2 + \dots + QP_n x^n + \dots \quad (1.41)$$

$$x^2 g(QP_n, x) = QP_0 x^2 + QP_1 x^3 + QP_2 x^4 + \dots + QP_{n-2} x^n + \dots \quad (1.42)$$

$$x^3 g(QP_n, x) = QP_0 x^3 + QP_1 x^4 + QP_2 x^5 + \dots + QP_{n-3} x^n + \dots \quad (1.43)$$

Baseada na Equação [(1.41) - (1.42+1.43)], tem-se que:

$$(1 - x^2 - x^3)g(QP_n, x) = QP_0 + QP_1 x + (QP_2 - QP_0)x^2 + (QP_3 - QP_1 - QP_0)x^3 + \dots + (QP_n - QP_{n-2} - QP_{n-3})x^n + \dots$$

Considerando os valores iniciais:

$QP_0 = 1 + i + j + 2k, QP_1 = 1 + i + 2j + 2k, QP_2 = 1 + 2i + 2j + 3k$ e a fórmula de recorrência, pode-se obter:

$$(1 - x^2 - x^3)g(QP_n, x) = QP_0 + QP_1 x + (QP_2 - QP_0)x^2$$

$$g(QP_n, x) = \frac{(1 + i + j + 2k) + (1 + i + 2j + 2k)x + (i + j + k)x^2}{1 - x^2 - x^3}.$$

Agora, analisaremos a matriz geradora Q dos quaternios de Padovan, através da matriz, com $n \in \mathbb{N}$:

$$Q^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-1} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-2} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-3} & P_{n-5} \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 5.$$

Propriedade 4. Para $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora do quaternion de Padovan é dada por (TASCI, 2018):

$$Q^n \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QP_{n+2} & QP_{n+1} & QP_n \\ QP_{n+1} & QP_n & QP_{n-1} \\ QP_n & QP_{n-1} & QP_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Através do princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 5$, tem-se:

$$\begin{aligned} Q^5 \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2QP_2 + 2QP_1 + QP_0 & 2QP_1 + 2QP_0 + QP_{-1} & 2QP_0 + 2QP_{-1} + QP_{-2} \\ QP_2 + 2QP_1 + QP_0 & QP_1 + 2QP_0 + QP_{-1} & QP_0 + 2QP_{-1} + QP_{-2} \\ QP_2 + QP_1 + QP_0 & QP_1 + QP_0 + QP_{-1} & QP_0 + QP_{-1} + QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} QP_7 & QP_6 & QP_5 \\ QP_6 & QP_5 & QP_4 \\ QP_5 & QP_4 & QP_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$Q^k \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-1} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-2} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-3} & P_{n-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QP_{k+2} & QP_{k+1} & QP_k \\ QP_{k+1} & QP_k & QP_{k-1} \\ QP_k & QP_{k-1} & QP_{k-2} \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$Q^{k+1} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{k-2} & P_{k-1} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-2} & P_{k-4} \\ P_{k-4} & P_{k-3} & P_{k-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{k-1} & P_k & P_{k-2} \\ P_{k-2} & P_{k-1} & P_{k-3} \\ P_{k-3} & P_{k-2} & P_{k-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} QP_{k+3} & QP_{k+2} & QP_{k+1} \\ QP_{k+2} & QP_{k+1} & QP_k \\ QP_{k+1} & QP_k & QP_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Vale ressaltar que a matriz Q utilizada pode ser alterada por uma das seis matrizes válidas de Padovan e obtendo, conseqüentemente, os termos da matriz geradora Q dos quatérnios de Padovan.

Teorema 35. A soma dos termos quatérnios de Padovan é descrita por:

$$\sum_{m=0}^n QP_m = QP_n + QP_{n+1} + QP_{n+2} - (2 + 3i + 4j + 5k).$$

Demonstração. Utilizando a relação de recorrência dos quatérnios de Padovan, tem-se que:

$$QP_n = QP_{n-2} + QP_{n-3}.$$

Porém, para que haja cancelamentos posteriormente, utiliza-se a seguinte relação:

$$QP_{n-2} = QP_n - QP_{n-3}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} QP_0 &= QP_2 - QP_{-1} \\ QP_1 &= QP_3 - QP_0 \\ QP_2 &= QP_4 - QP_1 \\ QP_3 &= QP_5 - QP_2 \\ &\vdots \\ QP_{n-3} &= QP_{n-1} - QP_{n-4} \\ QP_{n-2} &= QP_n - QP_{n-3} \\ QP_{n-1} &= QP_{n+1} - QP_{n-2} \\ QP_n &= QP_{n+2} - QP_{n-1}. \end{aligned}$$

Através de operações algébricas, pode-se realizar alguns cancelamentos, obtendo:

$$\sum_{m=0}^n QP_m = QP_n + QP_{n+1} + QP_{n+2} - QP_{-1} - QP_0 - QP_1.$$

Considerando os valores iniciais $QP_{-1} = i + j + k$, $QP_0 = 1 + i + j + 2k$ e $QP_1 = 1 + i + 2j + 2k$, conclui-se que:

$$\sum_{m=0}^n QP_m = QP_n + QP_{n+1} + QP_{n+2} - (2 + 3i + 4j + 5k).$$

Teorema 36. A soma dos $\mathbb{N}$ primeiros termos pares dos quatérnios de Padovan é (TASCI, 2018):

$$\sum_{m=1}^n QP_{2m} = QP_{2n+3} - (2 + 2i + 3j + 4k).$$

Demonstração. Através da recorrência $QP_n = QP_{n-2} + QP_{n-3} \Leftrightarrow QP_{n-3} = QP_n - QP_{n-2}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} QP_2 &= QP_5 - QP_3 \\ QP_4 &= QP_7 - QP_5 \\ &\vdots \\ QP_{2n-2} &= QP_{2n+1} - QP_{2n-1} \\ QP_{2n} &= QP_{2n+3} - QP_{2n+1}. \end{aligned}$$

Obtendo:

$$\sum_{m=1}^n QP_{2m} = QP_{2n+3} - QP_3 = QP_{2m} = QP_{2n+3} - (2 + 2i + 3j + 4k).$$

Teorema 37. O somatório dos $\mathbb{N}$ primeiros termos de índices ímpares dos quatérnios de Padovan são expressos por (TASCI, 2018):

$$\sum_{m=0}^n QP_{2m+1} = QP_{2n+4} - (1 + 2i + 2j + 3k).$$

Demonstração. Levando em consideração apenas os números de índices ímpares e a relação $QP_{n-3} = QP_n - QP_{n-2}$, pode-se realizar o somatório desses números, cancelando os termos de índice $2n$. Desse modo, valida-se este teorema.

Doravante, analisaremos o comportamento dos termos com índices inteiros não positivos dos quatérnios de Padovan.

Definição 32. A fórmula de recorrência dos quatérnios de Padovan para índice inteiro não positivo, para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, é dada por:

$$QP_{-n} = QP_{-n+3} - QP_{-n+1}.$$

Definição 33. O quaternion de Padovan, para índice inteiro não positivo, para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, é definido pela equação:

$$QP_{-n} = P_{-n} + iP_{-n+1} + jP_{-n+2} + kP_{-n+3}.$$

Propriedade 5. A função geradora dos quatérnios de Padovan para índice inteiro não positivo, é descrita por:

$$g(QP_{-n}, x) = \frac{-(1+i+j+2k) - (1+2i+2j+3k)x - (1+i+2j+2k)x^2}{x^3 - x - 1}.$$

Demonstração. Multiplicando a função por x e x^3 , tem-se:

$$g(QP_{-n}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} QP_{-n} x^n = QP_0 + QP_{-1}x + QP_{-2}x^2 + \dots + QP_{-n}x^n + \dots \quad (1.44)$$

$$xg(QP_{-n}, x) = QP_0x + QP_{-1}x^2 + QP_{-2}x^3 + \dots + QP_{-n-1}x^n + \dots \quad (1.45)$$

$$x^3g(QP_{-n}, x) = QP_0x^3 + QP_{-1}x^4 + QP_{-2}x^5 + \dots + QP_{-n-3}x^n + \dots \quad (1.46)$$

Com base na Equação [(1.46) - (1.45+1.44)], tem-se que:

$$\begin{aligned} (x^3 - x - 1)g(QP_{-n}, x) &= -QP_0 - (QP_0 + QP_{-1})x - (QP_{-2} + QP_{-1})x^2 \\ &+ (QP_0 - QP_{-2} - QP_{-3})x^3 + \dots + (QP_{-n-3} - QP_{-n} - QP_{-n-1})x^n + \dots \end{aligned}$$

Considerando os valores iniciais: $QP_0 = 1 + i + j + 2k$, $QP_{-1} = i + j + k$, $QP_{-2} = 1 + j + k$ e a fórmula de recorrência, pode-se obter:

$$(x^3 - x - 1)g(QP_{-n}, x) = -QP_0 - (QP_0 + QP_{-1})x - (QP_{-2} + QP_{-1})x^2$$

$$g(QP_{-n}, x) = \frac{-(1 + i + j + 2k) - (1 + 2i + 2j + 3k)x - (1 + i + 2j + 2k)x^2}{x^3 - x - 1}.$$

A matriz geradora Q dos quatérnios de Padovan, para índice inteiro não positivo, pode ser analisada calculando a inversa da matriz Q , utilizada para verificar o comportamento dos termos inteiros positivos da sequência. Assim, tem-se que:

$$\tilde{n} = Q^{-n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-1} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-2} & P_{-n-4} \\ P_{-n-4} & P_{-n-3} & P_{-n-5} \end{bmatrix}.$$

Propriedade 6. Para $n > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, a matriz geradora dos quatérnios de Padovan, com índice inteiro não positivo, é dada por:

$$\tilde{n}. \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} QP_{-n+2} & QP_{-n+1} & QP_{-n} \\ QP_{-n+1} & QP_{-n} & QP_{-n-1} \\ QP_{-n} & QP_{-n-1} & QP_{-n-2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Pelo princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 1$, tem-se:

$$\tilde{n}. \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix}$$

Assim, a igualdade é válida.

$$= \begin{bmatrix} QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \\ QP_2 - QP_0 & QP_1 - QP_{-1} & QP_0 - QP_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \\ QP_{-1} & QP_{-2} & QP_{-3} \end{bmatrix}.$$

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{n} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-1} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-2} & P_{-n-4} \\ P_{-n-4} & P_{-n-3} & P_{-n-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QP_{-k+2} & QP_{-k+1} & QP_{-k} \\ QP_{-k+1} & QP_{-k} & QP_{-k-1} \\ QP_{-k} & QP_{-k-1} & QP_{-k-2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{n}^{k+1} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{-k-2} & P_{-k-1} & P_{-k-3} \\ P_{-k-3} & P_{-k-2} & P_{-k-4} \\ P_{-k-4} & P_{-k-3} & P_{-k-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{-k-3} & P_{-k-2} & P_{-k-4} \\ P_{-k-4} & P_{-k-3} & P_{-k-5} \\ P_{-k-5} & P_{-k-4} & P_{-k-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QP_{-k+1} & QP_{-k} & QP_{-k-1} \\ QP_{-k} & QP_{-k-1} & QP_{-k-2} \\ QP_{-k-1} & QP_{-k-2} & QP_{-k-3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Teorema 38. A soma dos n primeiros termos com índice inteiro não positivo dos quatérnios de Padovan são expressos por:

$$\sum_{m=1}^n QP_{-m} = QP_{-n+3} + QP_{-n+2} + (2 + 3i + 4j + 5k).$$

Demonstração. Utilizando a relação de recorrência dos quatérnios de Padovan, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$QP_{-n} = QP_{-n+3} - QP_{-n+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} QP_{-1} &= QP_2 - QP_0 \\ QP_{-2} &= QP_1 - QP_{-1} \\ QP_{-3} &= QP_0 - QP_{-2} \\ QP_{-4} &= QP_{-1} - QP_{-3} \\ &\vdots \\ QP_{-n-3} &= QP_{-n} - QP_{-n-2} \\ QP_{-n-2} &= QP_{-n+1} - QP_{-n-1} \\ QP_{-n-1} &= QP_{-n+2} - QP_{-n} \\ QP_{-n} &= QP_{-n+3} - QP_{-n+1}. \end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\sum_{m=0}^n QP_m = QP_{-n+3} + QP_{-n+2} + QP_2 + QP_1.$$

Considerando os valores iniciais $QP_1 = 1 + i + 2j + 2k$, $QP_2 = 1 + 2i + 2j + 3k$, conclui-se que:

$$\sum_{m=0}^n QP_m = QP_{-n+3} + QP_{-n+2} + (2 + 3i + 4j + 5k).$$

Teorema 39. A soma dos ℓ primeiros termos pares com índice inteiro não positivo dos quatérnios de Padovan é:

$$\sum_{m=1}^n QP_{-2m} = QP_{2n+3} - (1 + i + 2j + 2k).$$

Demonstração. Utilizando a recorrência $QP_{-n} = QP_{-n+3} - QP_{-n+1}$, observa-se que

$$\begin{aligned} QP_{-2} &= QP_1 - QP_{-1} \\ QP_{-4} &= QP_{-1} - QP_{-3} \\ QP_{-6} &= QP_{-3} - QP_{-5} \\ &\vdots \\ QP_{-2n-2} &= QP_{-2n+1} - QP_{-2n-1} \\ QP_{-2n} &= QP_{-2n+3} - QP_{-2n+1}. \end{aligned}$$

Com isso, tem-se que:

$$\sum_{m=1}^n QP_{-2m} = QP_{-2n+3} + QP_1 = QP_{-2n} = QP_{-2n+3} + (1 + i + 2j + 2k).$$

De modo análogo ao realizado para a demonstração dos teoremas anteriores, pode-se facilmente validar também este teorema, realizando os cancelamentos sucessivos das operações algébricas.

Teorema 40. O somatório dos n primeiros termos de índices ímpares com índice inteiro não positivo dos quatérnios de Padovan são expressos por:

$$\sum_{m=1}^n QP_{-2m-1} = QP_{-2n+2} + (1 + 2i + 2j + 3k).$$



**UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA: O
ESTUDO DO MODELO DE PADOVAN
NO CURSO DE LICENCIATURA**

Neste trabalho, foi realizado o processo evolutivo matemático da SP, através de uma transposição didática aplicada no curso de Licenciatura em Matemática do IFCE, campus Fortaleza, na disciplina de HM. Contudo, desenvolvemos um estudo e aprofundamento do campo epistêmico matemático, explorando a generalização e complexificação da SP, diante de uma abordagem epistemológica, cognitiva e didática no campo de formação inicial de professores de Matemática.

Doravante, discutiremos algumas situações didáticas compostas por situações-problema, fundamentadas na TSD, analisando a metodologia empregada e as suas concepções. Vale ressaltar que serão analisados possíveis comportamentos e soluções manifestados pelos discentes durante as discussões das situações-problema, caracterizando assim a fase de concepção e análise *a priori* da ED.

Uma situação-problema é uma questão discursiva, porém com enunciados claros e objetivos, em que o objetivo principal é utilizar de forma implícita os objetivos matemáticos que visam ser alcançados por meio da resolução do problema (ALMOULOU, 2016).

Na fase anterior da ED, análise prévia, a generalização e complexificação da SP foi desenvolvida no campo epistêmico-matemático, fundamentando a concepção das situações-problema. Durante esta etapa da ED, destaca-se a concepção das situações didáticas, onde as variáveis são definidas de acordo com uma perspectiva microdidática, para que haja conexão entre os processos matemáticos sobre a SP e as situações-problema propostas.

Todavia, depois de desenvolvido o campo epistêmico-matemático referente ao processo evolutivo matemático da SP, com foco na generalização e complexificação, é importante transformá-lo em conteúdo a ser ensinado, visto que os conteúdos discutidos no capítulo anterior são abordados na licenciatura de Matemática Pura.

Diante disso, a concepção da situação didática deste trabalho consta no processo de generalização e complexificação da SP como

um conteúdo a ser ensinado em sala de aula. Assim, é formulada uma hipótese didática que se refere ao desenvolvimento do processo indutivo do estudante para a generalização e complexificação da SP. Essa hipótese possui o viés de investigar e explorar os teoremas e propriedades desenvolvidos de forma inédita nesta pesquisa, diante do contexto de ensino de HM, e fundamentada na metodologia de pesquisa da ED em associação com uma metodologia de ensino, que é a TSD. A escolha da disciplina de HM foi bastante relevante, visto que esta se associa à epistemologia dos conceitos matemáticos empregados na pesquisa, podendo assim enfatizar a evolução algébrica da SP.

Revisitando os conteúdos matemáticos desenvolvidos no campo epistêmico-matemático, temos: relações recorrentes de Padovan, generalização do Modelo de Padovan, sequência $(S_1, S_2, \dots, S_z)$ -Z-dovan, relações recorrentes $\mathbb{N}$ -dimensionais e números quatérnios. Diante disso, selecionamos os seguintes conteúdos: fórmula de Binet, forma matricial para os números inteiros, relações recorrentes bidimensionais, números gaussianos e quatérnios. Assim, elaboramos seis situações-problema inerentes a esses assuntos, norteando os estudantes para o processo de generalização e complexificação da SP.

Ressalta-se ainda que esses conteúdos foram selecionados por exigirem pouco conhecimento matemático dos estudantes, pois suas propriedades e seus teoremas são validados por meio de passos indutivos. Diante disso, tem-se a fase da análise *a priori*, em que são propostas situações-problema e os possíveis comportamentos dos discentes são analisados de acordo com a ED.

Assim, são descritas as escolhas e definidas as variáveis para direcionar um plano de ação atendendo os objetivos da pesquisa. Partimos de uma ação descritiva e preditiva com o objetivo de prever o comportamento dos discentes em cada fase da TSD elaborada, fazendo um levantamento de algumas hipóteses didáticas relacionadas às situações-problema, caracterizando assim uma análise preliminar.

Com o viés na exploração da generalização e complexificação da sequência, foram elaboradas seis situações-problema, referendadas nas definições estabelecidas anteriormente. Os conteúdos foram es-

colhidos com base nos conhecimentos prévios dos estudantes, segundo as disciplinas apuradas como pré-requisito para cursar HM no curso de Licenciatura em Matemática do IFCE. A quantidade das situações-problema propostas deu-se após um planejamento de aula, visando atingir apenas uma parte do semestre.

Assim, iniciando com o processo de construção dessa sequência, seguindo com alguns teoremas e propriedades, investigaremos o processo de generalização e complexificação, relacionando-o com outros conteúdos de matemática.

Situação-problema (1): A SP, cujo nome foi atribuído ao arquiteto italiano Richard Padovan, nascido na cidade de Pádua, Itália, em 1935 (STEWART, 1996), é uma espécie de parente da SF, linear, recorrente, aritmética, e de números inteiros, sendo a SP uma sequência de terceira ordem. Gérard Cordonnier (1907 – 1977) também desenvolveu alguns estudos acerca destes números, mais especificamente sobre o número plástico (número radiante). Com isso, a sequência também ficou conhecida como sequência de Padovan.

Esta sequência possui a seguinte relação de recorrência com $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3},$$

$n > 3$, onde $\{P_n\}$ é o n -ésimo termo da sequência e os primeiros termos são: $P_0 = P_1 = P_2 = 1$. Assim, os primeiros dez termos dessa sequência são dados por: 1,1,1,2,2,3,4,5,7,9.

Uma forma de obter qualquer elemento de uma sequência linear e recursiva é através da matriz geradora (FALCON; PLAZA, 2007). Esta técnica foi aplicada para a SF e, nesta atividade, a mesma ideia será aplicada para os números de Padovan. A SP possui uma matriz Q de ordem 3, a partir da qual, se elevada à n -ésima potência, podemos obter os termos sem o cálculo da recursividade.

A matriz geradora da SP é dada por (SOKHUMA, 2013):

$$\text{Para } Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-5} \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 5.$$

Com base nisso, encontre a matriz geradora da SP para os termos de índice inteiro não positivo da sequência.

Situação de ação: Realizando procedimentos mais imediatos para obter a resolução dessa situação-problema proposta, os estudantes devem então calcular alguns termos com base na recorrência $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$, $n \geq 3$ abordada na atividade anterior. Assim, devem substituir o valor de n por números menores do que 3, obtendo os seguintes termos da sequência

$$P_{-1} = 0, P_{-2} = 1, P_{-3} = P_{-4} = 0, P_{-5} = 1, P_{-6} = -1, P_{-7} = 1, P_{-8} = 0, P_{-9} = -1, P_{-10} = 2$$

Situação de formulação: utilizando um esquema de natureza teórica, contendo um raciocínio mais elaborado, os estudantes tomam como base conceitos matemáticos primordiais, como $QQ^{-1} = I$, calculando a matriz inversa ($Q^{-1} = \tilde{n}$), e obtendo:

$$\text{Para } \tilde{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } \tilde{n}^n = \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-1} & P_{-n-2} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-4} & P_{-n-5} \end{bmatrix}, n > 0.$$

Situação de validação: formalizando a linguagem utilizada nas etapas anteriores da TSD e, de posse da matriz geradora, realiza-se a devida demonstração, com o princípio da indução finita. Observa-se um certo cuidado ao realizar essa demonstração, visto que a matriz está elevada à potência negativa, podendo o discente confundir-se em algum passo do processo indutivo.

Situação de institucionalização: na etapa final, o docente mostra aos estudantes a intenção de encontrar uma generalização da matriz

geradora para os números de índice inteiro não positivo, realizando uma extensão dessa sequência para os números inteiros não positivos. Vale salientar que esse assunto não foi encontrado até então na área de Matemática Pura, fazendo com que os alunos realizem o processo de evolução da sequência, apresentando um certo grau de ineditismo.

Situação-problema (2): Com base em trabalhos de Gulec e Taskara (2012) e Civciv e Türkmen (2008), e de acordo com a Tabela 9, são representados os termos da sequência (S_1, S_2) -Padovan. Com isso, verifique se existe alguma relação dessa tabela com os termos $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, \dots)$. Caso exista, explique-a detalhadamente e determine alguns termos dessa sequência.

Tabela 9 – Termos da sequência (S_1, S_2) - Padovan.

n	B_n
0	1
1	1
2	1
3	$S_1 + S_2$
4	$S_1 + S_2$
5	$S_1 (S_1 + S_2) + S_2$

Fonte: Elaborado pelos autores

É possível obtermos uma matriz geradora para esta sequência estudada? Se sim, demonstre-a (VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2020b).

Situação de ação: Com base na Tabela 9, espera-se que os estudantes relacionem os termos dessa sequência apresentada com a SP, obtendo a relação $B_n = s_1 B_{n-2} + s_2 B_{n-3}, n \geq 3$, com $S_1, S_2 \in \mathbb{Z}$, e valores iniciais $B_0 = B_1 = B_2 = 1$, sendo possível generalizar os coeficientes da SP.

Situação de formulação: a matriz geradora deve ser obtida nesse momento, tendo como base as matrizes estudadas anteriormente por Seenukul *et al.* (2015) e Sokhuma (2013). Logo, tem-se que o opera-

dor é construído na primeira coluna da matriz, carregando consigo os coeficientes da fórmula de recorrência da sequência. As demais linhas e colunas são mantidas, e é necessária a inserção de um vetor com os valores de inicialização da sequência, sendo, portanto, multiplicado à esquerda da matriz. Por fim, a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_3 & B_2 & B_1 \end{bmatrix}$$

Ao elevar à n -ésima potência, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B_{n+2} & B_{n+1} & B_n \end{bmatrix}$$

Situação de validação: a demonstração deverá ocorrer por meio de indução matemática da matriz geradora, validando o teorema matemático estudado nessa atividade proposta.

Situação de institucionalização: durante essa fase, o docente apresentará o processo de construção de uma matriz geradora de uma sequência linear e recorrente, ressaltando a importância do vetor de inicialização. Com base na perspectiva da TSD, apresentamos então o modelo de generalização da SP, visando à compreensão dos estudantes em relação aos conteúdos abordados.

Situação-problema (3): segundo Harman (1981), podemos estabelecer a relação $a + bi$, onde a e b são termos de uma determinada sequência e, i a unidade imaginária, em que $i^2 = -1$. Assim, de maneira semelhante à realizada nos trabalhos de Vieira, Alves e Catarino (2019b) e Oliveira, Alves e Paiva (2017) para outras sequências numéricas, podemos aplicá-la para a SP, utilizando a relação $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}i$, com $n \in \mathbb{N}$.

Assim, com base na recorrência unidimensional de Padovan, podemos então estabelecer uma relação bidimensional desta sequência: $P(n, m) = P(n-2, m) + P(n-3, m)$ e $P(n, m) = P(n, m-2) + P(n, m-3)$.

Logo, utilizando os seguintes valores iniciais definidos $P(0, 0) = 1, P(1, 0) = 1, P(2, 0) = 1, P(0, 1) = 1+i, P(0, 2) = 1+i, P(1, 1) = 1+i, P(1, 2) = 1+i, P(2, 1) = 1+i, P(2, 2) = 1+i$ em que $P(0) = P(1) = P(2) = 1, P(-1) = 0$, foi possível obter as propriedades $P(n, 0) = P(n)$ e $P(0, m) = P(m) + P(m-1)i$. Com base nisso, é possível estabelecer uma relação para os números na forma $P(n, m)$, em que os dois inteiros, $n, m \in \mathbb{Z}$? Demonstre-a.

Situação de ação: a partir das duas propriedades estabelecidas $P(n, 0) = P(n)$ e $P(0, m) = P(m) + P(m-1)i$, os estudantes devem perceber, para a primeira propriedade, que o valor de m foi fixado como 0, e n foi variado. Na segunda propriedade, o valor de n foi fixado como 0 e m foram variados. Assim, devem seguir o mesmo raciocínio, fixando para o valor 1. Logo: fixando $m = 1$ e variando $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Segue que:

$$P(n, 1) = P(n-2, 1) + P(n-3, 1):$$

$$P(3, 1) = P(1, 1) + P(0, 1) = 2 + 2i = P(3) + P(3)i;$$

$$P(4, 1) = P(2, 1) + P(1, 1) = 2 + 2i = P(4) + P(4)i;$$

$$P(5, 1) = P(3, 1) + P(2, 1) = 3 + 3i = P(5) + P(5)i;$$

$$P(6, 1) = P(4, 1) + P(3, 1) = 4 + 4i = P(6) + P(6)i;$$

⋮

$$P(n-3, 1) = P(n-5, 1) + P(n-6, 1) = P(n-3) + P(n-3)i;$$

$$P(n-2, 1) = P(n-4, 1) + P(n-5, 1) = P(n-2) + P(n-2)i;$$

$$P(n-1, 1) = P(n-3, 1) + P(n-4, 1) = P(n-1) + P(n-1)i;$$

$$P(n, 1) = P(n-2, 1) + P(n-3, 1) = P(n-2) + P(n-2)i + P(n-3) + P(n-3)i = P(n) + P(n)i.$$

Fixando $n = 1$ e variando $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, tem-se que:

$$P(1, m) = P(1, m-2) + P(1, m-3):$$

$$P(1, 3) = P(1, 1) + P(1, 0) = 2 + i = P(3) + P(2)i;$$

$$P(1, 4) = P(1, 2) + P(1, 1) = 2 + 2i = P(4) + P(3)i;$$

$$P(1, 5) = P(1, 3) + P(1, 2) = 3 + 2i = P(5) + P(4)i;$$

$$P(1, 6) = P(1, 4) + P(1, 3) = 4 + 3i = P(6) + P(5)i;$$

$\vdots$

$$P(1, m-3) = P(1, m-5) + P(1, m-6) = P(m-3) + P(m-4)i;$$

$$P(1, m-2) = P(1, m-4) + P(1, m-5) = P(m-2) + P(m-3)i;$$

$$P(1, m-1) = P(1, m-3) + P(1, m-4) = P(m-1) + P(m-2)i;$$

$$P(1, m) = P(1, m-2) + P(1, m-3)n = P(m-2) + P(m-3)i + P(m-3) + P(m-4)i \\ = P(m) + P(m-1)i.$$

Situação de formulação: com base nas propriedades fornecidas, e nas calculadas, os estudantes deverão perceber, de modo intuitivo, que, para os dois inteiros, $n, m \in \mathbb{N}$, os números na forma $P(n, m)$ formam a relação bidimensional: $P(n, m) = (P(n)P(m)) + (P(n)P(m-1))i$.

Situação de validação: a partir da relação bidimensional generalizada dos números de Padovan, é possível validar esta propriedade por meio do segundo princípio da indução finita sobre n ou m e fixando o valor do número natural.

Situação de institucionalização: é o momento em que o docente verifica as resoluções dos estudantes e revela o início do processo de complexificação da SP, obtendo as relações bidimensionais destes números, a partir da inserção de uma unidade imaginária.

Situação-problema (4): um quaternion é dado por uma extensão dos números complexos, desenvolvidos por William Rowan Hamilton (1805-1865). Possui duas estruturas quaterniônicas, sendo elas os quatérnios em $\mathbb{H}$, possuindo componentes reais, e os quatérnios complexos (biquatérnios) em $\mathbb{H}_\mathbb{C}$, possuindo variáveis complexas. Assim, os quatérnios são compreendidos como somas formais de esca-

lares, com vetores usuais do espaço tridimensional, existindo quatro dimensões (OLIVEIRA, 2018).

Contudo, baseado nos trabalhos de Tasci (2018) e Diskaya e Menken (2019), tem-se que um quaternion de Padovan é definido, com $n \in \mathbb{N}, n \geq 0, i^2 = j^2 = k^2 = -1$, pela equação: $QP_n = P_n + iP_{n+1} + jP_{n+2} + kP_{n+3}$.

Assim, a sua fórmula de recorrência, com os valores iniciais $QP_0 = 1 + i + j + 2k, QP_1 = 1 + i + 2j + 2k, QP_2 = 1 + 2i + 2j + 3k$, é definida por:

$$QP_n = QP_{n-2} + QP_{n-3}.$$

À vista disso, utiliza-se a matriz geradora dos quaternions de Padovan, através da matriz, com $n \in \mathbb{N}$:

$$Q^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-1} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-2} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-3} & P_{n-5} \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 5.$$

Logo, para $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, temos que a matriz geradora do quaternion de Padovan é dada por (TASCI, 2018):

$$\begin{aligned} Q^n \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} QP_{n+2} & QP_{n+1} & QP_n \\ QP_{n+1} & QP_n & QP_{n-1} \\ QP_n & QP_{n-1} & QP_{n-2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Diante disso, encontre a matriz geradora dos quaternions de Padovan, para índices inteiros não positivos. Demonstre.

Situação de ação: considerando a fórmula de recorrência para a obtenção dos quaternions de Padovan inteiros positivos, termos positivos, os estudantes deverão calcular os termos para os números inteiros

não positivos. Assim, deverão utilizar a recorrência $QP_n = QP_{n-2} + QP_{n-3}$ e os seus respectivos termos iniciais:

$$QP_0 = 1 + i + j + 2k, QP_1 = 1 + i + 2j + 2k, QP_2 = 1 + 2i + 2j + 3k.$$

Situação de formulação: visando obter a matriz geradora dos quatérnios de Padovan para índices inteiros não positivos, é necessário que seja calculada a inversa da matriz geradora Q desses números, fornecida na questão, obtendo assim:

$$\tilde{n} = Q^{-n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-1} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-2} & P_{-n-4} \\ P_{-n-4} & P_{-n-3} & P_{-n-5} \end{bmatrix}.$$

Com isso, ao obter os termos desta sequência estimada na questão e, calculando-se a inversa dessa matriz, tem-se que para $n > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, a matriz geradora dos quatérnios de Padovan, com índice inteiro não positivo, é dada por:

$$\tilde{n} \cdot \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QP_{-n+2} & QP_{-n+1} & QP_{-n} \\ QP_{-n+1} & QP_{-n} & QP_{-n-1} \\ QP_{-n} & QP_{-n-1} & QP_{-n-2} \end{bmatrix}.$$

Situação de validação: a veracidade ocorrerá por meio do princípio da indução finita, demonstrando a forma matricial para os números inteiros não positivos.

Situação de institucionalização: o docente deverá verificar as resoluções obtidas, apresentando aos estudantes a forma matricial dos quatérnios de Padovan, para índices inteiros não positivos, generalizando essa sequência quaterniônica para os números inteiros.

Com isso, finaliza-se o processo de complexificação desta sequência.





EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISES - DISCUSSÕES DOS DADOS

A fase da experimentação ocorreu no IFCE, *campus* Fortaleza, no curso de Licenciatura em Matemática, durante a disciplina de HM obrigatória para o sexto semestre, em 2019.1 e 2020.1, com os oito estudantes matriculados em ambos os semestres. Esta pesquisa possui o parecer aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), com o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) assinado pelos alunos participantes desta pesquisa.

Todavia, a aplicação aconteceu durante duas semanas com cinco sessões didáticas, duração de duas horas cada aula, realizadas através de situações didáticas fundamentadas na TSD, em ambos os semestres. As situações-problema propostas foram desenvolvidas por meio de listas de exercícios, onde posteriormente ocorreram discussões em grupos formados, visando à elaboração de estratégias de soluções descritas no quadro branco e/ou papel.

No primeiro dia, apresentamos a SP através dos fatos históricos e evolutivos desta sequência, ressaltando o seu viés epistemológico-matemático. Nos demais dias, discutimos as situações-problema propostas, objetivando analisar a evolução deste objeto matemático em estudo, com foco no processo de generalização e complexificação. Para a coleta de dados, realizamos alguns procedimentos, tais como registros fotográficos durante as produções e gravação em áudio dos depoimentos dos discentes.

Os dados e resultados coletados durante a execução da TSD são apresentados e discutidos, baseados nas produções mais relevantes desta pesquisa.

Na aplicação, é importante destacar possíveis correções e ajustes locais, indicando então apenas alguns elementos que consideramos mais relevantes nesta pesquisa durante o processo de experimentação (ALMOULOU, 2007). Sobretudo, ressalta-se que, após a experimentação, existe um retorno para a análise a *posteriori*, avaliando e

analisando os resultados obtidos e explorando os dados para que haja uma contribuição dos conhecimentos didáticos durante a transmissão do conteúdo.

O processo histórico-evolutivo da SP, com ênfase no processo de generalização e complexificação, vem evoluindo recentemente. A generalização é desenvolvida em duas partes, sendo elas: i) representação matricial, onde apresenta uma abordagem a partir da matriz geradora de Padovan (SEENUKUL *et al.*, 2015; SOKHUMA, 2013), até a SP de ordem z (VIEIRA; ALVES, 2019d); e ii) a sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{z-1})$ -Z-dovan, onde são generalizados os coeficientes da SP até a sequência de Z-dovan. Para o processo de complexificação, é realizada uma divisão em duas partes, a saber: as relações bi, tri e n -dimensionais, em que são inseridas unidades imaginárias na SP de i (bidimensional) até a unidade μ_n (n -dimensional); e os quatérnios de Padovan que representam os termos da sequência em quatro dimensões, sendo então desenvolvidos por Tasci (2018). Para os números positivos. Porém, neste trabalho, foram estudadas algumas propriedades até então não encontradas na literatura, e sua extensão para os números inteiros não positivos foi desenvolvida.

Visando realizar uma transposição didática sobre o processo de generalização e complexificação dessa sequência, foram selecionados alguns conteúdos para ser trabalhados na fase de experimentação dessa pesquisa, criando assim situações-didáticas. Diante disso, a TSD foi utilizada para fundamentar a fase de experimentação da ED.

Após a análise *a posteriori*, é importante que haja uma validação dos elementos utilizados na fase de experimentação da ED, comparando os resultados discutidos pelos discentes, levantando possíveis questionamentos e analisando a evolução ou não da engenharia sugerida. As situações-problema discutidas devem ser consideradas como variáveis microdidáticas, que segundo Almouloud (2016), são referentes ao local onde a pesquisa é realizada durante a experimentação.

A seguir, são realizadas observações e discussões com base nos registros armazenados durante as aplicações, tendo enfoque na ED e na TSD, validando de forma interna esta pesquisa.

A validação ocorreu com o desenvolvimento de situações didáticas, através de atividades propostas, com o viés de instigar o lado investigativo do aluno, fornecendo conhecimentos necessários para as respectivas resoluções, efetivando-se assim o contrato didático. Com isso, as situações-problema possibilitaram o entendimento e compreensão de conteúdos inerentes ao processo de generalização e complexificação da SP, discutindo-as de acordo com as variáveis didáticas.

As variáveis são selecionadas de acordo com o modo das questões propostas, direcionando o estudante a compreender uma parte do processo de generalização e complexificação da SP, iniciando com a fórmula de Binet, dada por uma fórmula fechada para determinar os termos da SP.

Dando continuidade a esse processo, analisamos a compreensão em torno da extensão da sequência para os números inteiros, em sua forma matricial. E, por fim, investigou-se a generalização dos coeficientes da fórmula de recorrência dos números de Padovan. Para o processo de complexificação, examinamos as relações bidimensionais, inserindo unidades imaginárias nessa sequência e seguindo com dois novos conjuntos numéricos conhecidos como quatérnios, adaptando-os para os números de Padovan. Durante a fase de validação, utilizamos muitas vezes o método de indução matemática para validar os teoremas e propriedades, visto que esse é um método de demonstração conhecido pela turma.

A aplicação teve início com a distribuição da lista, orientando que os alunos interagissem. Assim, conforme Oliveira (2018), os estudantes irão buscar “sistematizar uma estratégia de resolução para, em seguida, formular argumentos que possam ser validados posteriormente”. Os registros foram realizados através de gravações de áudios e fotos.

A situação-problema 1 tem por objetivo apresentar aos alunos a matriz geradora de Sokhuma (2013) de ordem 3 para a SP, propondo

aos estudantes que obtenham uma nova matriz geradora de mesma ordem, para os termos inteiros não positivos da sequência. Diante disso, tem-se, na Figura 14, o início da ação acontecendo, onde o Aluno D substituiu os valores de n da definição da recorrência original da sequência.

Ressalta-se que essa atividade foi desenvolvida por todos os alunos, porém para efeito de apresentação nesta pesquisa, tem-se a divulgação das resoluções dos Alunos C e D nesta fase. Assim, o Aluno D iniciou a resolução com a substituição dos valores na definição, já o Aluno C multiplicou as matrizes para a obtenção da matriz inversa.

Figura 14 – Fase da Ação pelo Aluno D - Matriz geradora de Padovan para o lado esquerdo da sequência.

Handwritten work on a whiteboard showing the calculation of the Padovan sequence and its matrix representation.

Left side (Aluno D's work):

$$P_2 - P_{2-2} = P_{2-3}$$

$$P_2 = P_0 + P_1$$

$$P_1 - P_0 = 1 - 1 = 0$$

$$P_2 = 1$$

$$P_3 = P_1 + P_0 = 1 + 1 = 2$$

$$P_4 = P_2 + P_1 = 1 + 1 = 2$$

$$P_5 = P_3 + P_2 = 2 + 1 = 3$$

$$P_6 = P_4 + P_3 = 2 + 2 = 4$$

$$P_7 = P_5 + P_4 = 3 + 2 = 5$$

$$P_8 = P_6 + P_5 = 4 + 3 = 7$$

$$P_9 = P_7 + P_6 = 5 + 4 = 9$$

$$P_{10} = P_8 + P_7 = 7 + 5 = 12$$

$$P_{11} = P_9 + P_8 = 9 + 7 = 16$$

$$P_{12} = P_{10} + P_9 = 12 + 9 = 21$$

$$P_{13} = P_{11} + P_{10} = 16 + 12 = 28$$

$$P_{14} = P_{12} + P_{11} = 21 + 16 = 37$$

$$P_{15} = P_{13} + P_{12} = 28 + 21 = 49$$

$$P_{16} = P_{14} + P_{13} = 37 + 28 = 65$$

$$P_{17} = P_{15} + P_{14} = 49 + 37 = 86$$

$$P_{18} = P_{16} + P_{15} = 65 + 49 = 114$$

$$P_{19} = P_{17} + P_{16} = 86 + 65 = 151$$

$$P_{20} = P_{18} + P_{17} = 114 + 86 = 200$$

$$P_{21} = P_{19} + P_{18} = 151 + 114 = 265$$

$$P_{22} = P_{20} + P_{19} = 200 + 151 = 351$$

$$P_{23} = P_{21} + P_{20} = 265 + 200 = 465$$

$$P_{24} = P_{22} + P_{21} = 351 + 265 = 616$$

$$P_{25} = P_{23} + P_{22} = 465 + 351 = 816$$

$$P_{26} = P_{24} + P_{23} = 616 + 465 = 1081$$

$$P_{27} = P_{25} + P_{24} = 816 + 616 = 1432$$

$$P_{28} = P_{26} + P_{25} = 1081 + 816 = 1897$$

$$P_{29} = P_{27} + P_{26} = 1432 + 1081 = 2513$$

$$P_{30} = P_{28} + P_{27} = 1897 + 1432 = 3329$$

$$P_{31} = P_{29} + P_{28} = 2513 + 1897 = 4410$$

$$P_{32} = P_{30} + P_{29} = 3329 + 2513 = 5842$$

$$P_{33} = P_{31} + P_{30} = 4410 + 3329 = 7739$$

$$P_{34} = P_{32} + P_{31} = 5842 + 4410 = 10252$$

$$P_{35} = P_{33} + P_{32} = 7739 + 5842 = 13581$$

$$P_{36} = P_{34} + P_{33} = 10252 + 7739 = 17991$$

$$P_{37} = P_{35} + P_{34} = 13581 + 10252 = 23833$$

$$P_{38} = P_{36} + P_{35} = 17991 + 13581 = 31572$$

$$P_{39} = P_{37} + P_{36} = 23833 + 17991 = 41824$$

$$P_{40} = P_{38} + P_{37} = 31572 + 23833 = 55405$$

$$P_{41} = P_{39} + P_{38} = 41824 + 31572 = 73396$$

$$P_{42} = P_{40} + P_{39} = 55405 + 41824 = 97229$$

$$P_{43} = P_{41} + P_{40} = 73396 + 55405 = 128801$$

$$P_{44} = P_{42} + P_{41} = 97229 + 73396 = 170625$$

$$P_{45} = P_{43} + P_{42} = 128801 + 97229 = 226030$$

$$P_{46} = P_{44} + P_{43} = 170625 + 128801 = 299426$$

$$P_{47} = P_{45} + P_{44} = 226030 + 170625 = 396655$$

$$P_{48} = P_{46} + P_{45} = 299426 + 226030 = 525456$$

$$P_{49} = P_{47} + P_{46} = 396655 + 299426 = 696081$$

$$P_{50} = P_{48} + P_{47} = 525456 + 396655 = 922111$$

$$P_{51} = P_{49} + P_{48} = 696081 + 525456 = 1221537$$

$$P_{52} = P_{50} + P_{49} = 922111 + 696081 = 1618192$$

$$P_{53} = P_{51} + P_{50} = 1221537 + 922111 = 2143648$$

$$P_{54} = P_{52} + P_{51} = 1618192 + 1221537 = 2839729$$

$$P_{55} = P_{53} + P_{52} = 2143648 + 1618192 = 3761840$$

$$P_{56} = P_{54} + P_{53} = 2839729 + 2143648 = 4983377$$

$$P_{57} = P_{55} + P_{54} = 3761840 + 2839729 = 6601569$$

$$P_{58} = P_{56} + P_{55} = 4983377 + 3761840 = 8745217$$

$$P_{59} = P_{57} + P_{56} = 6601569 + 4983377 = 11584946$$

$$P_{60} = P_{58} + P_{57} = 8745217 + 6601569 = 15346786$$

$$P_{61} = P_{59} + P_{58} = 11584946 + 8745217 = 20330163$$

$$P_{62} = P_{60} + P_{59} = 15346786 + 11584946 = 26931732$$

$$P_{63} = P_{61} + P_{60} = 20330163 + 15346786 = 35676949$$

$$P_{64} = P_{62} + P_{61} = 26931732 + 20330163 = 47261895$$

$$P_{65} = P_{63} + P_{62} = 35676949 + 26931732 = 62608681$$

$$P_{66} = P_{64} + P_{63} = 47261895 + 35676949 = 82938844$$

$$P_{67} = P_{65} + P_{64} = 62608681 + 47261895 = 109870576$$

$$P_{68} = P_{66} + P_{65} = 82938844 + 62608681 = 145547525$$

$$P_{69} = P_{67} + P_{66} = 109870576 + 82938844 = 192809420$$

$$P_{70} = P_{68} + P_{67} = 145547525 + 109870576 = 255418101$$

$$P_{71} = P_{69} + P_{68} = 192809420 + 145547525 = 338356945$$

$$P_{72} = P_{70} + P_{69} = 255418101 + 192809420 = 448227521$$

$$P_{73} = P_{71} + P_{70} = 338356945 + 255418101 = 593775046$$

$$P_{74} = P_{72} + P_{71} = 448227521 + 338356945 = 786584466$$

$$P_{75} = P_{73} + P_{72} = 593775046 + 448227521 = 1042002567$$

$$P_{76} = P_{74} + P_{73} = 786584466 + 593775046 = 1380359512$$

$$P_{77} = P_{75} + P_{74} = 1042002567 + 786584466 = 1828587033$$

$$P_{78} = P_{76} + P_{75} = 1380359512 + 1042002567 = 2422362079$$

$$P_{79} = P_{77} + P_{76} = 1828587033 + 1380359512 = 3208946545$$

$$P_{80} = P_{78} + P_{77} = 2422362079 + 1828587033 = 4250949112$$

$$P_{81} = P_{79} + P_{78} = 3208946545 + 2422362079 = 5631308624$$

$$P_{82} = P_{80} + P_{79} = 4250949112 + 3208946545 = 7460895657$$

$$P_{83} = P_{81} + P_{80} = 5631308624 + 4250949112 = 9882257736$$

$$P_{84} = P_{82} + P_{81} = 7460895657 + 5631308624 = 13092204281$$

$$P_{85} = P_{83} + P_{82} = 9882257736 + 7460895657 = 17343153393$$

$$P_{86} = P_{84} + P_{83} = 13092204281 + 9882257736 = 22974462017$$

$$P_{87} = P_{85} + P_{84} = 17343153393 + 13092204281 = 30435357674$$

$$P_{88} = P_{86} + P_{85} = 22974462017 + 17343153393 = 40317615410$$

$$P_{89} = P_{87} + P_{86} = 30435357674 + 22974462017 = 53409819691$$

$$P_{90} = P_{88} + P_{87} = 40317615410 + 30435357674 = 70752973084$$

$$P_{91} = P_{89} + P_{88} = 53409819691 + 40317615410 = 93727435101$$

$$P_{92} = P_{90} + P_{89} = 70752973084 + 53409819691 = 124162792775$$

$$P_{93} = P_{91} + P_{90} = 93727435101 + 70752973084 = 164480408185$$

$$P_{94} = P_{92} + P_{91} = 124162792775 + 93727435101 = 217890227876$$

$$P_{95} = P_{93} + P_{92} = 164480408185 + 124162792775 = 288643200960$$

$$P_{96} = P_{94} + P_{93} = 217890227876 + 164480408185 = 382370636061$$

$$P_{97} = P_{95} + P_{94} = 288643200960 + 217890227876 = 506533428836$$

$$P_{98} = P_{96} + P_{95} = 382370636061 + 288643200960 = 671013837021$$

$$P_{99} = P_{97} + P_{96} = 506533428836 + 382370636061 = 888904064897$$

$$P_{100} = P_{98} + P_{97} = 671013837021 + 506533428836 = 1177547265857$$

$$P_{101} = P_{99} + P_{98} = 888904064897 + 671013837021 = 1559917901918$$

$$P_{102} = P_{100} + P_{99} = 1177547265857 + 888904064897 = 2066451330754$$

$$P_{103} = P_{101} + P_{100} = 1559917901918 + 1177547265857 = 2737465167775$$

$$P_{104} = P_{102} + P_{101} = 2066451330754 + 1559917901918 = 3626369232672$$

$$P_{105} = P_{103} + P_{102} = 2737465167775 + 2066451330754 = 4803916498529$$

$$P_{106} = P_{104} + P_{103} = 3626369232672 + 2737465167775 = 6363834400447$$

$$P_{107} = P_{105} + P_{104} = 4803916498529 + 3626369232672 = 8430285731201$$

$$P_{108} = P_{106} + P_{105} = 6363834400447 + 4803916498529 = 11167750898976$$

$$P_{109} = P_{107} + P_{106} = 8430285731201 + 6363834400447 = 14794120131648$$

$$P_{110} = P_{108} + P_{107} = 11167750898976 + 8430285731201 = 19598036629977$$

$$P_{111} = P_{109} + P_{108} = 14794120131648 + 11167750898976 = 25961871030624$$

$$P_{112} = P_{110} + P_{109} = 19598036629977 + 14794120131648 = 34392156761625$$

$$P_{113} = P_{111} + P_{110} = 25961871030624 + 19598036629977 = 45559907660601$$

$$P_{114} = P_{112} + P_{111} = 34392156761625 + 25961871030624 = 60354027792249$$

$$P_{115} = P_{113} + P_{112} = 45559907660601 + 34392156761625 = 80952064422226$$

$$P_{116} = P_{114} + P_{113} = 60354027792249 + 45559907660601 = 105913935452850$$

$$P_{117} = P_{115} + P_{114} = 80952064422226 + 60354027792249 = 141306092214475$$

$$P_{118} = P_{116} + P_{115} = 105913935452850 + 80952064422226 = 186866000000076$$

$$P_{119} = P_{117} + P_{116} = 141306092214475 + 105913935452850 = 247220027667325$$

$$P_{120} = P_{118} + P_{117} = 186866000000076 + 141306092214475 = 328172092214551$$

$$P_{121} = P_{119} + P_{118} = 247220027667325 + 186866000000076 = 434086027667401$$

$$P_{122} = P_{120} + P_{119} = 328172092214551 + 247220027667325 = 575392119881876$$

$$P_{123} = P_{121} + P_{120} = 434086027667401 + 328172092214551 = 762258119881952$$

$$P_{124} = P_{122} + P_{121} = 575392119881876 + 434086027667401 = 1009478147549277$$

$$P_{125} = P_{123} + P_{122} = 762258119881952 + 575392119881876 = 1337650239763828$$

$$P_{126} = P_{124} + P_{123} = 1009478147549277 + 762258119881952 = 1771736267431229$$

$$P_{127} = P_{125} + P_{124} = 1337650239763828 + 1009478147549277 = 2347128387313105$$

$$P_{128} = P_{126} + P_{125} = 1771736267431229 + 1337650239763828 = 3109386507195057$$

$$P_{129} = P_{127} + P_{126} = 2347128387313105 + 1771736267431229 = 4118864654744334$$

$$P_{130} = P_{128} + P_{127} = 3109386507195057 + 2347128387313105 = 5456514894508162$$

$$P_{131} = P_{129} + P_{128} = 4118864654744334 + 3109386507195057 = 7228251161939391$$

$$P_{132} = P_{130} + P_{129} = 5456514894508162 + 4118864654744334 = 9575379549252496$$

$$P_{133} = P_{131} + P_{130} = 7228251161939391 + 5456514894508162 = 12684766056447553$$

$$P_{134} = P_{132} + P_{131} = 9575379549252496 + 7228251161939391 = 16803627711191887$$

$$P_{135} = P_{133} + P_{132} = 12684766056447553 + 9575379549252496 = 22260145605700049$$

$$P_{136} = P_{134} + P_{133} = 16803627711191887 + 12684766056447553 = 29488393767639440$$

$$P_{137} = P_{135} + P_{134} = 22260145605700049 + 16803627711191887 = 39063773316891936$$

$$P_{138} = P_{136} + P_{135} = 29488393767639440 + 22260145605700049 = 51748539373339489$$

$$P_{139} = P_{137} + P_{136} = 39063773316891936 + 29488393767639440 = 68552167084531376$$

$$P_{140} = P_{138} + P_{137} = 51748539373339489 + 39063773316891936 = 90812312690231425$$

$$P_{141} = P_{139} + P_{138} = 68552167084531376 + 51748539373339489 = 120300706457870865$$

$$P_{142} = P_{140} + P_{139} = 90812312690231425 + 68552167084531376 = 159354479774762801$$

$$P_{143} = P_{141} + P_{140} = 120300706457870865 + 90812312690231425 = 211113019148102290$$

$$P_{144} = P_{142} + P_{141} = 159354479774762801 + 120300706457870865 = 279655186232633666$$

$$P_{145} = P_{143} + P_{142} = 211113019148102290 + 159354479774762801 = 370467498922865091$$

$$P_{146} = P_{144} + P_{143} = 279655186232633666 + 211113019148102290 = 490768205380735957$$

$$P_{147} = P_{145} + P_{144} = 370467498922865091 + 279655186232633666 = 650122685155498757$$

$$P_{148} = P_{146} + P_{145} = 490768205380735957 + 370467498922865091 = 861235704303601048$$

$$P_{149} = P_{147} + P_{146} = 650122685155498757 + 490768205380735957 = 1140890890536234714$$

$$P_{150} = P_{148} + P_{147} = 861235704303601048 + 650122685155498757 = 1511358389459099805$$

$$P_{151} = P_{149} + P_{148} = 1140890890536234714 + 861235704303601048 = 2002126594839835762$$

$$P_{152} = P_{150} + P_{149} = 1511358389459099805 + 1140890890536234714 = 2652249279995334519$$

$$P_{153} = P_{151} + P_{150} = 2002126594839835762 + 1511358389459099805 = 3513484984298935567$$

$$P_{154} = P_{152} + P_{151} = 2652249279995334519 + 2002126594839835762 = 4654375874835170281$$

$$P_{155} = P_{153} + P_{152} = 3513484984298935567 + 2652249279995334519 = 6165734264294270086$$

$$P_{156} = P_{154} + P_{153} = 4654375874835170281 + 3513484984298935567 = 8167860859134105848$$

$$P_{157} = P_{155} + P_{154} = 6165734264294270086 + 4654375874835170281 = 10820108139129440367$$

$$P_{158} = P_{156} + P_{155} = 8167860859134105848 + 6165734264294270086 = 14333595123428375934$$

$$P_{159} = P_{157} + P_{156} = 10820108139129440367 + 8167860859134105848 = 18987968998263546215$$

$$P_{160} = P_{158} + P_{157} = 14333595123428375934 + 10820108139129440367 = 25153703262557816301$$

$$P_{161} = P_{159} + P_{158} = 18987968998263546215 + 14333595123428375934 = 33321564121691922149$$

$$P_{162} = P_{160} + P_{159} = 25153703262557816301 + 18987968998263546215 = 44141672260821362516$$

$$P_{163} = P_{161} + P_{160} = 33321564121691922149 + 25153703262557816301 = 58475267384249738450$$

$$P_{164} = P_{162} + P_{161} = 44141672260821362516 + 33321564121691922149 = 77463236382513284665$$

$$P_{165} = P_{163} + P_{162} = 58475267384249738450 + 44141672260821362516 = 102616939645071100966$$

$$P_{166} = P_{164} + P_{163} = 77463236382513284665 + 58475267384249738450 = 135938503766763023115$$

$$P_{167} = P_{165} + P_{164} = 102616939645071100966 + 77463236382513284665 = 180080176027584385631$$

$$P_{168} = P_{166} + P_{165} = 135938503766763023115 + 102616939645071100966 = 238555443411834124081$$

$$P_{169} = P_{167} + P_{166} = 180080176027584385631 + 135938503766763023115 = 316018679794347408746$$

$$P_{170} = P_{168} + P_{167} = 238555443411834124081 + 180080176027584385631 = 418635619439418509712$$

$$P_{171} = P_{169} + P_{168} = 316018679794347408746 + 238555443411834124081 = 554574123206181532827$$

$$P_{172} = P_{170} + P_{169} = 418635619439418509712 + 316018679794347408746 = 734654299233765918458$$

$$P_{173} = P_{171} + P_{170} = 554574123206181532827 + 418635619439418509712 = 973209742645600042539$$

$$P_{174} = P_{172} + P_{171} = 734654299233765918458 + 554574123206181532827 = 1289228422839947451285$$

$$P_{175} = P_{173} + P_{172} = 973209742645600042539 + 734654299233765918458 = 1707864041879365960997$$
<

Figura 15 – Fase da Formulação pelo Aluno C - Matriz geradora de Padovan para o lado esquerdo da sequência.

$$Q \cdot Q^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d & e & f \\ a+g & b+h & c+i \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

Fonte: Acervo dos autores

Dando continuidade ao processo de formulação, o Aluno D concluiu a obtenção da matriz inversa e dos termos gerados da SP (ver Figura 16), visto que os demais estudantes encontraram dificuldade em visualizar os termos obtidos na matriz Q, com os termos da sequência inteiros não positivos de Padovan. Porém, o Aluno D conseguiu compreender e explicar para os demais colegas o comportamento dessa matriz ao ser elevada à n -ésima potência.

Figura 16 – Continuação da Fase da Formulação pelo Aluno D - Matriz geradora de Padovan para o lado esquerdo da sequência.

$$\text{Para } n=1 \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{-3} & P_{-4} & P_{-5} \\ P_{-2} & P_{-3} & P_{-4} \\ P_{-4} & P_{-5} & P_{-6} \end{bmatrix}$$

$$n=1$$

Fonte: Acervo dos autores

A validação foi obtida por meio do princípio da indução finita, discutida e proposta pelos alunos, tendo o devido cuidado com a matriz inversa. Assim os estudantes conseguiram demonstrar a validade desta propriedade, selecionando a resolução do Aluno B para apresentação neste trabalho. Este denominou a matriz Q^{-1} de $\hat{N}$, como mostrado na Figura 17.

Figura 17 – Fase da Validação pelo Aluno B - Matriz geradora de Padovan para o lado esquerdo da sequência.

Handwritten mathematical work by Aluno B showing the construction of the Padovan matrix Q and its inverse Q^{-1} for $n=1$, $n=K$, and $n=K+1$.

For $n=1$:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_3 & p_4 & p_5 \\ p_2 & p_3 & p_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

For $n=K$, $K \in \mathbb{N}$:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^K = \begin{bmatrix} p_{K-2} & p_{K-3} & p_{K-4} \\ p_{K-1} & p_{K-2} & p_{K-3} \\ p_{K-3} & p_{K-4} & p_{K-5} \end{bmatrix}$$

For $n=K+1$:

$$Q^{K+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^K \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{K-2} & p_{K-3} & p_{K-4} \\ p_{K-1} & p_{K-2} & p_{K-3} \\ p_{K-3} & p_{K-4} & p_{K-5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

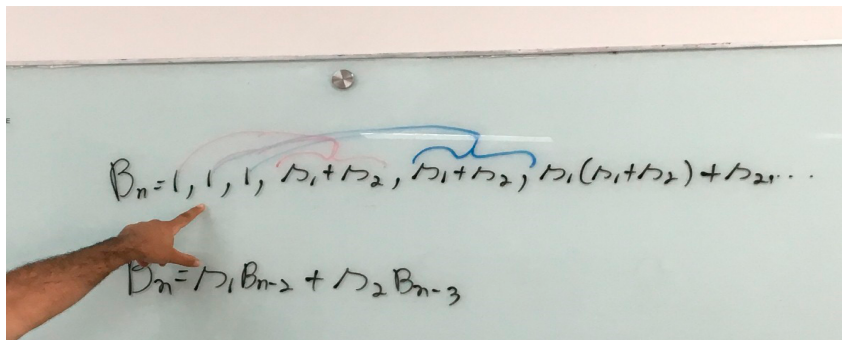
$$= \begin{bmatrix} p_{K-3} & p_{K-4} & p_{K-2}-p_{K-4} \\ p_{K-2} & p_{K-3} & p_{K-1}-p_{K-3} \\ p_{K-4} & p_{K-5} & p_{K-3}-p_{K-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{K-3} & p_{K-4} & p_{K-5} \\ p_{K-2} & p_{K-3} & p_{K-4} \\ p_{K-4} & p_{K-5} & p_{K-6} \end{bmatrix}$$

Fonte: Acervo dos autores

Finalizando essa atividade com a institucionalização, foi possível obter a matriz inversa da SP para os termos inteiros não positivos (índice inteiro não positivo) demonstrada anteriormente.

A situação-problema 2 encerra o processo de generalização da SP, em que foram generalizados os coeficientes da sequência. Pode-se, então, identificar a fase da ação na Figura 18, onde o Aluno G compara essa sequência com a SP, e assim consegue estabelecer a sua respectiva fórmula de recorrência, percebendo a inserção das variáveis, s_1, s_2 nos coeficientes.

Figura 18 – Fase da ação pelo Aluno G – Generalização dos coeficientes da recorrência de Padovan.



Fonte: Acervo dos autores

Na fase de formulação, foi possível obter a forma matricial dessa sequência, de acordo com a matriz geradora de Padovan e com o vetor de inicialização estudado na primeira situação-problema. Assim, o Aluno H conseguiu compreender que a primeira coluna da matriz geradora traz consigo os valores dos coeficientes da fórmula de recorrência, como mostrado na Figura 19.

Figura 19 – Fase da formulação pelo Aluno H - Generalização dos coeficientes da recorrência de Padovan.

Fonte: Acervo dos autores

Na Figura 20, temos o Aluno D utilizando o passo indutivo matemático, dando início ao processo de validação da matriz. Ressalta-se que o primeiro passo da validação para $n = 1$ foi realizado pelo Aluno H, ao obter a matriz (ver Figura 19).

Figura 20 – Fase da validação pelo Aluno D - Generalização dos coeficientes da recorrência de Padovan.

$$P_{\text{adov}} n=k \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Supondo que seja válido para } k$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ S_1 & 0 & 1 \\ S_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} B_{k+2} & B_{k+1} & B_k \end{bmatrix}$$

Fonte: Acervo dos autores

Por fim, tem-se o Aluno D, na Figura 21, continuando o processo de validação, onde verifica a veracidade para $n=k+1$. Contudo, é possível validar o teorema apresentado com caráter de ineditismo na literatura e em artigos de Matemática Pura, referentes aos números de Padovan.

Figura 21 – Finalização da fase da validação pelo Aluno D - Generalização dos coeficientes da recorrência de Padovan.

$$B_n = (1, 1, 1, t_1 + t_2, t_1 + t_2, t_1 + t_2, t_1 + t_2, t_1 + t_2, t_1 + t_2, \dots)$$

$$\text{Protelemos que é válido para } k+1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ S_1 & 0 & 1 \\ S_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ S_1 & 0 & 1 \\ S_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 B_{k+1} + S_2 B_k & B_{k+2} & B_{k+1} \\ B_{k+3} & B_{k+2} & B_{k+1} \end{bmatrix}$$

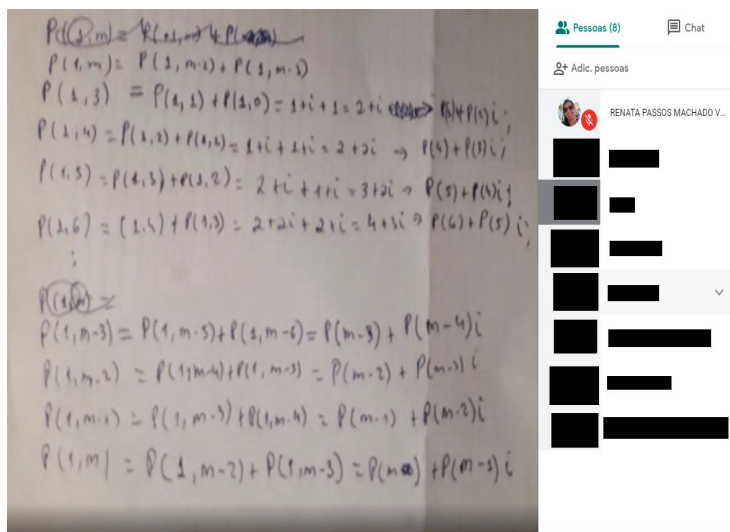
$$\begin{bmatrix} B_{k+2} & B_{k+1} & B_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ S_1 & 0 & 1 \\ S_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 B_{k+1} + S_2 B_k & B_{k+2} & B_{k+1} \\ B_{k+3} & B_{k+2} & B_{k+1} \end{bmatrix}$$

Fonte: Acervo dos autores

A aplicação do processo de complexificação da sequência foi realizada de forma *on-line*, uma vez que as aulas presenciais foram suspensas devido à pandemia do novo coronavírus (COVID-19). Contudo, o estudo prosseguiu com o auxílio da plataforma do *Google Meet*, sendo este recurso de fácil acesso e disponibilizado de forma gratuita, a partir do mês de maio deste ano vigente. Dessa forma, foram criadas salas de reuniões, e firmamos um acordo de convivência, estabele-

cendo algumas regras, tais como: o microfone deveria ser ligado somente quando os participantes estivessem discutindo as resoluções, evitando ruídos; a obrigatoriedade do uso da câmera somente no momento das discussões, para não sobrecarregar a conexão dos demais; ao necessitar falar, os estudantes deveriam escrever uma mensagem no *chat*, autorizando assim a liberação do microfone; e, que utilizassem as folhas de rascunhos para as resoluções das questões, evitando rasuras. Assim, os registros foram realizados por meio de gravações de vídeo e fotos da tela do computador. Ressalta-se que os estudantes discutiam as resoluções obtidas por meio da plataforma utilizada, além de explicar a sua respectiva resolução aos demais. Pode-se observar, na Figura 22, o momento em que um estudante discute a sua solução com os demais participantes, ressaltando a ausência de dois estudantes neste momento.

Figura 22 – Aula pelo Google Meet.



Fonte: Acervo dos autores

Destaca-se que foram realizadas cinco aulas *on-line*, com duração de duas horas, contando com a participação de todos os alunos matriculados, uma vez que o IFCE disponibilizou *chips* com dados móveis e *tablets* para aqueles que não possuíam acesso à internet.

Logo, temos que a situação-problema 3 apresenta a relação de recorrência da SP, com a inserção da unidade imaginária i , fornecendo ainda os seus valores iniciais na forma bidimensional, bem como duas propriedades. Assim, tem-se nas Figuras 23 e 24 a fase da ação acontecendo pelo Aluno E e pelo Aluno G, respectivamente, com a obtenção de mais duas propriedades tais como: $P(n,1) = P(n) + P(n)i$ e $P(1,m) = P(m) + P(m-1)i$.

Figura 23 – Fase da ação pelo Aluno E - Relações Bidimensionais de Padovan.

$$\begin{aligned} \text{Fixando } m=2 \\ P(n, 2) &= P(n-2, 2) + P(n-3, 2) \\ P(3, 2) &= P(1, 2) + P(0, 2) = 2 + 2i = P(3) + P(3)i \\ P(4, 2) &= P(2, 2) + P(1, 2) = 2 + 2i = P(4) + P(4)i \\ P(5, 2) &= P(3, 2) + P(2, 2) = 3 + 3i = P(5) + P(5)i \\ P(6, 2) &= P(4, 2) + P(3, 2) = 4 + 4i = P(6) + P(6)i \\ &\vdots \\ P(n, 2) &= P(n) + P(n)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Variando } m=0, 1, \dots, k \\ P(n, 0) &= 1 \cdot P(n) + 0 \cdot P(n)i = P(0)P(n) + P(-1)P(n)i \\ P(n, 1) &= 1 \cdot P(n) + 1 \cdot P(n)i = P(1)P(n) + P(0)P(n)i \\ P(n, 2) &= 1 \cdot P(n) + 1 \cdot P(n)i = P(2)P(n) + P(1)P(n)i \\ &\vdots \\ P(n, k-3) &= P(k-3)P(n) + P(k-4)P(n)i \\ P(n, k-2) &= P(k-2)P(n) + P(k-3)P(n)i \\ P(n, k-1) &= P(k-1)P(n) + P(k-2)P(n)i \\ P(n, k) &= P(n, k-2) + P(n, k-3) \\ &= P(k-2)P(n) + P(k-3)P(n)i + \\ &\quad P(k-3)P(n) + P(k-4)P(n)i \\ &= P(k)P(n) + P(k-1)P(n)i \end{aligned}$$

Fonte: Acervo dos autores

Figura 24 – Finalização da fase da ação pelo Aluno G - Relações Bidimensionais de Padovan.

$$P(n, m) = P(n, m-2) + P(n, m-3)$$

$$P(3, 3) = P(1, 1) + P(1, 0) = 1+i+1 = 2+i = P(3) + P(2)i$$

$$P(3, 4) = P(1, 2) + P(1, 1) = 1+i+1+i = 2+2i = P(4) + P(3)i$$

$$P(3, 5) = P(1, 3) + P(1, 2) = 2+i+1+i = 3+2i = P(5) + P(4)i$$

$$P(3, 6) = P(1, 4) + P(1, 3) = 2+2i+2+i = 4+3i = P(6) + P(5)i$$

$$\vdots$$

$$P(1, m) = P(m) + P(m-1)i$$

Fonte: Acervo dos autores

Durante a fase da formulação, os estudantes puderam generalizar a relação bidimensional de Padovan, obtendo a fórmula $P(n, m) = P(n)P(m) + P(n)P(m-1)i$. Logo, na Figura 25, observou-se a fase da validação pelo Aluno A, em que ele utiliza o segundo princípio da indução finita para demonstrar a veracidade da resolução. Percebemos assim que se fixou o valor de n , com as propriedades já encontradas e variou-se o valor de m .

Figura 25 – Fase da validação pelo Aluno A - Relações Bidimensionais de Padovan.

$$\begin{aligned} & \bullet P(3, m) = P(n-2, m) + P(n-3, m) \\ & \bullet P(3, 1) = P(1, 1) + P(0, 1) = (1+i) + (1+i) = 2+2i = P(3) + P(3)i \\ & \bullet P(4, 1) = P(2, 1) + P(1, 1) = (1+i) + (1+i) = 2+2i = P(4) + P(4)i \\ & \bullet P(5, 1) = P(3, 1) + P(2, 1) = [(1+i) + (1+i)] + (1+i) = 3+3i = P(5) + P(5)i \\ & P(n, 1) = P(n-2, 1) + P(n-3, 1) = [P(n) + P(n)i] \end{aligned}$$

Fonte: Acervo dos autores

Por fim, a situação-problema 4 aborda a álgebra quaterniônica, estudando os quatérnios de Padovan. Assim, são inseridas unidades

imaginárias nessa sequência, estudando o processo de complexificação desses números, fundamentado no trabalho de Tasci (2018). Diante disso, explorou-se a forma matricial e o comportamento desses termos para o lado esquerdo, analisando-se os números inteiros não positivos. Logo, tem-se a fase da ação do Aluno G, visualizada na Figura 26, onde o aluno calcula os quatérnios de Padovan com índices inteiros não positivos.

Figura 26 – Fase da ação pelo Aluno G - Quatérnios de Padovan.

$\dots, QP_1, QP_2, QP_3, QP_4, QP_5, QP_6, \dots$
 $P_0 = P_0 + iP_1 + jP_2 + kP_3 \Rightarrow QP_0 = 1 + i + j + 2k$
 $1 = P_1 + iP_2 + jP_3 + kP_4 \Rightarrow QP_1 = 1 + i + 2j + 2k$
 $-1 = P_2 + iP_3 + jP_4 + kP_5 \Rightarrow QP_2 = 1 + 2i + 2j + 3k$
 Utilizando a lei de recorrência $QP_n = QP_{n-2} + QP_{n-3}$
 $QP_{-1} = QP_0 + QP_{-2} \Rightarrow QP_{-1} = QP_0 - QP_2 = 1 + 2i + 2j + 3k - 1 - 2i - 2j - 3k$
 $QP_{-1} = i + j + k$
 $QP_{-2} = QP_1 - QP_{-1} = 1 + i + 2j + 2k - i - j - k$
 $QP_{-2} = 1 + j + k$
 $QP_{-3} = QP_0 - QP_{-2} = 1 + i + j + 2k - 1 - j - k$
 $QP_{-3} = i + k$
 $QP_{-4} = QP_{-2} - QP_{-3} = 1 + j + k - i - k$
 $QP_{-4} = 1 + j$
 $QP_{-5} = QP_{-2} - QP_{-4} = 1 + j + k - j$
 $QP_{-5} = 1 + k$
 $QP_{-6} = -1 + i$
 $QP_{-7} = QP_{-4} - QP_{-6} = 1 + j + i$
 $QP_{-7} = 1 - i + j$
 $QP_{-8} = QP_{-5} - QP_{-7} = 1 + k - 1 - i - j$
 $QP_{-8} = i - j + k$
 $QP_{-9} = QP_{-6} - QP_{-8} = -1 + i - i + j - k$
 $QP_{-9} = -1 + j - k$
 $QP_{-10} = QP_{-7} - QP_{-9} = 1 - i + j + 1 - j + k$
 $QP_{-10} = 2 - i + k$

Fonte: Acervo dos autores

Após o cálculo dos termos dessa sequência para o lado esquerdo, o Aluno E calculou a matriz inversa de Q de Padovan, estimada por meio de recursos tecnológicos de livre escolha, visando favorecer a resolução da atividade proposta. Dessa forma, tem-se a fase da formulação pelo Aluno E, na Figura 27, com a matriz inversa de Q multiplicada pela matriz dos quatérnios, alcançando assim a forma matricial dos quatérnios de Padovan com índices inteiros não positivos.

Figura 27 – Fase da formulação pelo Aluno E - Quatérnios de Padovan.

$$Q^{-3} \cdot QP = \begin{bmatrix} QP_2 - QP_0 & QP_1 - QP_{-1} & QP_0 - QP_{-2} \\ -QP_1 + QP_2 + QP_0 & -QP_0 + QP_1 + QP_{-1} & -QP_0 + QP_{-1} + QP_{-2} \\ QP_0 - QP_1 & QP_1 - QP_0 & QP_0 - QP_{-1} \end{bmatrix}$$

$$Q^{-3} \cdot QP = \begin{bmatrix} 1 + 2i + 2j + 3k - 1 - i - j - 2k & 1 + i + 2j + 2k - i - j - k & 1 + i + j + 2k - 1 - j - k \\ -1 - 2i - 2j - 3k + 1 + i + 2j + 2k + 1 + i + j + 2k & -1 - i - 2j - 2k + 1 + i + 2j + 2k + i + j + k & -1 - i - j - 2k + 1 + i + 2j + 2k \\ 1 + 2i + 2j + 3k - 1 - i - 2j - 2k & 1 + i + 2j + 2k - 1 - i - j - k & 1 + i + j + 2k - i - j - k \end{bmatrix}$$

$$Q^{-3} \cdot QP = \begin{bmatrix} i + j + k & 1 + j + k & i + k \\ 1 + j + k & i + k & j \\ i + k & j & 1 + k \end{bmatrix}$$

$$Q^{-3} \cdot QP = \begin{bmatrix} QP_{-1} & QP_{-2} & QP_{-3} \\ QP_{-2} & QP_{-3} & QP_{-4} \\ QP_{-3} & QP_{-4} & QP_{-5} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$Q^{-n} \cdot QP = \begin{bmatrix} QP_{-n+2} & QP_{-n+1} & QP_{-n} \\ QP_{-n+1} & QP_{-n} & QP_{-n-1} \\ QP_{-n} & QP_{-n-1} & QP_{-n-2} \end{bmatrix}$$

Fonte: Acervo dos autores

Finalizando, na situação-problema 4, tem-se a fase da validação, em que o Aluno H (ver Figura 28) utiliza o princípio da indução finita, demonstrando a veracidade da forma matricial dos quatérnios de Padovan com índice inteiro não positivo.

Figura 28 – Fase da validação pelo Aluno H - Quatérnios de Padovan.

$$p/N = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^1 \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \\ QP_{-1} & QP_{-2} & QP_{-3} \end{bmatrix}$$

$$p/N = k, k \in \mathbb{N}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} QP_k & QP_{k-1} & QP_{k-2} \\ QP_{k-1} & QP_{k-2} & QP_{k-3} \\ QP_{k-2} & QP_{k-3} & QP_{k-4} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} QP_{k+1} & QP_k & QP_{k-1} \\ QP_k & QP_{k-1} & QP_{k-2} \\ QP_{k-1} & QP_{k-2} & QP_{k-3} \end{bmatrix}$$

$$p/N = k+1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} QP_{k+1} & QP_k & QP_{k-1} \\ QP_k & QP_{k-1} & QP_{k-2} \\ QP_{k-1} & QP_{k-2} & QP_{k-3} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} QP_{k+2} & QP_{k+1} & QP_k \\ QP_{k+1} & QP_k & QP_{k-1} \\ QP_k & QP_{k-1} & QP_{k-2} \end{bmatrix}$$

Fonte: Acervo dos autores

Neste capítulo, foi feita uma análise e discussão das resoluções das situações-problema propostas aos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática e, ainda, categorizadas de acordo com a Tabela 10. Realizou-se uma comparação entre as fases de análise *a priori* e *a posteriori*, com base nos dados coletados durante a experimentação, validando, portanto, esta pesquisa. Vale salientar que essa validação ocorreu de forma interna, pois foram analisadas apenas as produções observadas neste trabalho. A fase de institucionalização da TSD tem grande importância durante essa validação, já que nesta etapa acontece a comprovação do entendimento e construção dos conceitos matemáticos vistos em sala de aula.

Durante essa validação, realiza-se uma comparação entre as fases de análise *a priori* e *a posteriori* baseada nos dados coletados durante a experimentação. A fase de institucionalização da TSD tem grande importância durante essa validação, pois, nesta etapa, acontece a comprovação do entendimento e a construção dos conceitos matemáticos vistos em sala de aula.

No decurso das resoluções das situações-problema, os obstáculos epistemológicos e cognitivos foram identificados, observando-se a dificuldade dos estudantes em formular algumas propriedades matemáticas, bem como a sua validação. Esse fato é evidenciado quando determinado aluno diz: “— não sei utilizar o princípio da indução finita”. Porém, esses obstáculos foram superados com a troca de informações entre os demais estudantes. Ressalta-se que obstáculos epistemológicos, segundo Rodrigues e Grubba (2012) “são uma espécie de contrapensamento que podem surgir no momento da constituição do conhecimento ou numa fase posterior.”

No Quadro 1, observa-se ainda a institucionalização dos conceitos matemáticos abordados nas atividades propostas, em torno do processo de generalização. Com isso, na primeira situação-problema, foi possível realizar uma extensão da sequência para os números inteiros não positivos, estabelecendo a sua forma matricial, a partir da matriz-base geradora, a fim de obter os termos da sequência, sem necessitar conhecer os seus termos anteriores. Na segunda situação-

-problema, comparou-se a SP com outros números sequenciais, observando-se assim a generalização dos coeficientes da recorrência de Padovan, denominada neste trabalho de sequência (s_1, s_2) - Padovan.

Quadro 1 – Categorização das resoluções das situações-problema propostas referentes à generalização.

Situação-problema 1	
Ação	Obtenção dos termos inteiros não positivos da SP.
Formulação	Construção da forma matricial da extensão da SP para os números inteiros não positivos, com base em $QQ^{-1} = I$.
Validação	Validação da matriz geradora para os termos com índices inteiros não positivos da sequência por indução matemática.
Institucionalização	Estabelecimento da forma matricial da SP negativa, em que $Q^{-1} = \tilde{n}$. Logo: Para $\tilde{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, tem-se $\tilde{n}^n = \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-1} & P_{-n-2} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-4} & P_{-n-5} \end{bmatrix}, n > 0$.
Situação-problema 2	
Ação	Estabelecimento da recorrência generalizada dos coeficientes comparando-a com a SP.
Formulação	Construção da forma matricial da sequência com coeficientes generalizados.
Validação	Validação da matriz por meio do princípio da indução finita.
Institucionalização	Forma matricial da sequência (s_1, s_2)-Padovan com coeficientes generalizados $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B_{n+2} & B_{n+1} & B_n \end{bmatrix}.$

Fonte: Elaborado pelos autores

Já no Quadro 2, faz-se uma institucionalização do processo de complexificação dos números de Padovan, evidenciados nas atividades discutidas. Contudo, situação-problema 3, a relação bidimensional da sequência foi obtida de forma generalizada, apenas com a inserção de uma unidade imaginária. Por fim, na quarta situação-

-problema, com base na matriz geradora dos quatérnios de Padovan, investigou-se a sua forma matricial generalizada, obtendo-se assim os índices inteiros não positivos.

Quadro 2 – Categorização das resoluções das situações-problema propostas referentes à complexificação.

Situação-problema 3	
Ação	Obtenção de novas propriedades variando $\mathbb{N}, m$.
Formulação	Determinação da forma bidimensional de Padovan, com a inserção da unidade imaginária i .
Validação	Validação da forma generalizada bidimensional da SP, por meio do segundo princípio da indução finita.
Institucionalização	Relação bidimensional de Padovan generalizada $(P(n, m) = P(n)P(m) + P(n)P(m - 1)i)$.
Situação-problema 4	
Ação	Obtenção dos termos inteiros não positivos dos quatérnios de Padovan.
Formulação	Construção da forma matricial dos quatérnios de Padovan para índices inteiros não positivos.
Validação	Validação da matriz geradora dos quatérnios de Padovan, para os termos com índices inteiros não positivos por indução matemática.
Institucionalização	Forma matricial dos quatérnios de Padovan para índices inteiros não positivos, com: $\tilde{n} = Q^{-n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-1} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-2} & P_{-n-4} \\ P_{-n-4} & P_{-n-3} & P_{-n-5} \end{bmatrix}$ Assim, tem-se que: $\tilde{n} \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} QP_2 & QP_1 & QP_0 \\ QP_1 & QP_0 & QP_{-1} \\ QP_0 & QP_{-1} & QP_{-2} \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} QP_{-n+2} & QP_{-n+1} & QP_{-n} \\ QP_{-n+1} & QP_{-n} & QP_{-n-1} \\ QP_{-n} & QP_{-n-1} & QP_{-n-2} \end{bmatrix}, \text{ com } n > 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}.$

Fonte: Elaborado pelos autores

Ressaltam-se algumas desvantagens em coletar os dados de forma *on-line*, tais como: compartilhamento de tela do recurso utilizado era permitido somente por um participante de cada vez, visto que os estudantes não puderam compartilhar as suas telas, de modo simultâneo para que fossem visualizadas as suas respectivas soluções; ocorreu oscilação da conexão de rede de alguns estudantes, em determinados momentos, causando entrada e saída dos usuários da sala de reuniões; e, atraso em analisar as soluções dos estudantes, devido à maneira *on-line* de como os dados foram coletados, necessitando verificar a resolução de cada usuário de maneira remota.

Por fim, foi possível considerar alguns pontos positivos com a utilização da ferramenta, considerada, portanto, a mais importante, por possibilitar a continuidade da coleta de dados, não prejudicando o andamento da pesquisa. Vale ainda destacar que apenas um estudante não continuou a participar da pesquisa durante a pandemia, informando que não havia computador e nem celular disponível no momento da aula e para utilizar o determinado recurso computacional, enviando, portanto, as suas soluções via *WhatsApp*. Contudo, foi possível finalizar a fase de experimentação e validação, não havendo prejuízo para a pesquisa.



**O FRACTAL DE NEWTON COMO
FORMA DE VISUALIZAÇÃO
ALTERNATIVA DE SEQUÊNCIAS
LINEARES E RECORRENTES**

O presente estudo foi baseado no trabalho de Vieira, Alves e Catariño (2019a), que realizaram uma forma de visualizar as extensões da SP, investigando as raízes dos seus respectivos polinômios característicos.

O método de Newton é bastante conhecido para o cálculo de aproximações sucessivas dos zeros polinomiais, podendo convergir rapidamente, caso a iteração tenha início próximo da raiz desejada. Porém, quando a iteração começa longe da raiz desejada, deve-se tomar bastante cuidado para não se incorrer em erros nesse método (TEODORO; AGUILAR, 2015).

Exemplificamos com o trabalho de Teodoro e Aguilar (2015), que transformam o polinômio dessa sequência numa função, construindo assim o seu gráfico. Assim, aplica-se a fórmula do método de New-

ton, $f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ e decide-se o valor inicial para começar as iterações para obtenção da raiz.

Os fractais apresentam grande importância na área de investigação matemática, podendo assumir uma infinidade de formas e difíceis conclusões para elas (BURTON, 2009). Segundo Carreira e Andrade (1999), os fractais caracterizam-se por possuir pelo menos uma das seguintes propriedades: a) autossimilaridade – onde um pedaço do fractal é similar ao restante da figura; b) complexidade infinita – apresentando um número infinito de interações no fractal; c) dimensão fractal – diferente da geometria euclidiana, nem sempre o fractal possui a dimensão inteira, podendo ser fracionária.

Esses fractais podem ser classificados ainda segundo a forma como são gerados (ALVES, 2007): a) definidos por uma relação de recorrência em cada ponto do espaço, verificando se a sequência tende ou não para o infinito; b) aleatórios que são gerados por processos estocásticos; c) ponto fixo de um sistema de funções iteradas, onde o conjunto de funções são aplicados de forma sucessivas.

A aplicação dos fractais é realizada de acordo com a modelagem dos objetos, comparando com a sua geometria fractal, considerando diversos fatores de aproximação, dependendo do seu grau de exatidão. Esses fractais podem ser aplicados em diversas áreas, destacando a área da matemática, sendo possível analisar algumas sequências lineares e recorrentes.

Como toda sequência possui um polinômio característico que varia de acordo com a sua ordem, torna-se necessário o cálculo de obtenção de suas respectivas raízes. Sendo assim, uma das maneiras de se conhecer a raiz de uma equação matemática de uma sequência linear e recorrente pode ser através do método fractal de Newton, em que é possível visualizar as raízes com esse recurso computacional, além de diagnosticar aplicações em diversas áreas, tais como ciências da natureza e física.

Um exemplo é o caso da SF no trabalho de Monnerot-Dumaine (2009), em que se constroi o seu fractal e se analisam os resultados, criando propriedades e padrões de acordo com a figura formada. Com a utilização do fractal de Newton como forma de visualização alternativa de sequências lineares e recorrentes, podem-se analisar as suas raízes e diagnosticar a sua aplicação no cotidiano, pois muitas vezes conjecturam-se fórmulas e definições matemáticas dessas sequências sem que se conheça a sua real aplicação e visualização. O fractal de Newton é, portanto, uma arte fractal que transforma as funções matemáticas numa mídia, podendo ser imagens, músicas e animações.

Doravante, esse método é desenvolvido com o uso da ferramenta do *Google Colab* para SP, Tridovan e Tetradovan, e seus respectivos fractais gerados são discutidos. *Google Colab* é uma ferramenta gratuita hospedada pela *Google*, sendo executada na nuvem. Esse recurso permite realizar simulações computacionais com suporte para *Python* e algumas bibliotecas já instaladas, sendo então salvos os arquivos no *Drive* e o processo de configuração realizado de forma fácil e rápida.

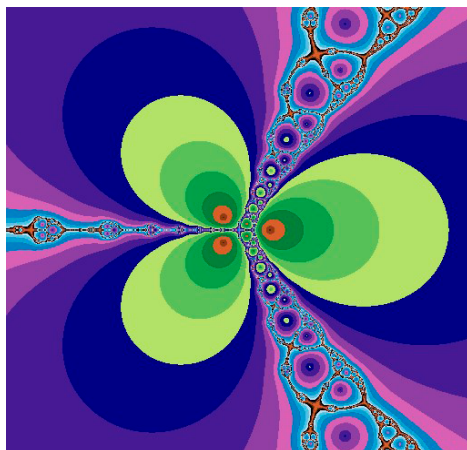
A escolha dessa ferramenta para computação matemática foi fundamentada pelo fato de esse *software* ser gratuito, de fácil manuseio,

além de possuir hospedagem na nuvem. Com isso, as imagens das funções são geradas a partir desse recurso computacional. As figuras plotadas e apresentadas adiante caracterizam-se como fractais feitos através de uma recorrência em cada ponto do seu espaço.

Assim, desenvolveu-se o código na linguagem *Phyton* para plotar os fractais de acordo com o método de Newton e com a equação característica da sequência. São apresentados nas figuras a seguir, tendo sido analisados de acordo com as suas bolsas e lóbulos.

Para a função da SP ($f(x) = x^3 - x - 1$), tem-se o fractal de Newton gerado como mostrado na Figura 29. Assim, nota-se a existência de três lóbulos, um mais central e dois mais laterais. Esses lóbulos representam as raízes da função e, traçando uma linha horizontal representando o eixo x do plano cartesiano, verifica-se que apenas um está nessa posição. Assim, visualizamos a existência de apenas uma raiz real, sendo aproximadamente 1,32. Na linha vertical, eixo y , nota-se a existência de dois lóbulos representando as raízes complexas. A cor alaranjada na parte central de cada lóbulo representa o valor exato da raiz e as outras cores em volta dos lóbulos representam a quantidade de iterações. Com isso, quanto mais distante do lóbulo laranja, mais distante estará do valor da raiz da função.

Figura 29 – Fractal de Newton da SP.



Fonte: Elaborado pelos autores

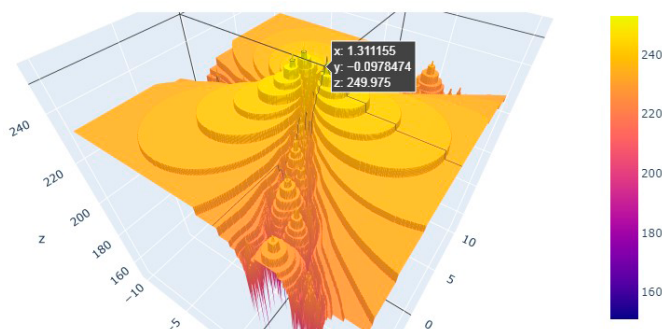
De acordo com o método de Newton realizado nessa aplicação, destaca-se a realização de seis iterações para encontrar as raízes. Assim, analisando a figura, pode-se notar que existem oito variações de cores em cada lóbulo, sendo estas a quantidade máxima de iterações existentes até encontrar o valor da raiz que está localizado no lóbulo de cor laranja.

Os três traços apresentados na Figura 29 mostram a descontinuidade da raiz, limitando para qual raiz irá tender, dependendo do chute inicial. É importante ainda destacar que o intervalo inserido no código em *Phyton* para plotar o fractal de Newton foi $[-10,10]$, buscando-se assim as raízes dessa função.

Uma visualização em 3D do fractal de Newton de Padovan é mostrada na Figura 30, destacando que as três raízes agora são representadas pelas montanhas. Quanto mais no topo, mais próximo está do valor da raiz, e quanto mais na base, mais distante do valor da raiz. A escala ao lado da figura mostra a proximidade com as raízes. Quanto mais voltado para a cor alaranjada, mais perto está do valor da raiz. É possível navegar com o mouse em cima das montanhas, mostrando os valores na tela.

Com isso, diante dessa perspectiva, pode-se perceber a existência de três eixos, sendo que os eixos x e y mostram os valores das iterações para obter a raiz. Na Figura 30, tem-se o valor $x = 1,311155$ e $y = -0,0978474$, em que o valor de y está bem próximo de zero, não existindo parte imaginária. Já o valor de x é dado por aproximadamente 1,32, conhecido como número plástico (discutido nesta pesquisa). O eixo z representa a proximidade com o valor exato da raiz, onde se tem o valor $z = 249,975$. De acordo com a escala ao lado, os valores acima de 260 estão mais próximos do lóbulo laranja, portanto mais próximo do valor correto.

Figura 30 – Fractal de Newton da SP em 3 D.



Fonte: Elaborado pelos autores

Antes de analisarmos o fractal de Newton da sequência de Tridovan, faremos um breve estudo da razão de convergência dessa extensão. Pode-se perceber, como mostrado na Tabela 10, que dividindo um termo pelo seu anterior, essa nova sequência converge para o valor 1,46. Assim, percebe-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{3(n+1)}}{P_{3(n)}} \approx 1,46$$

Tabela 10 – Análise da convergência entre os termos vizinhos de Tridovan.

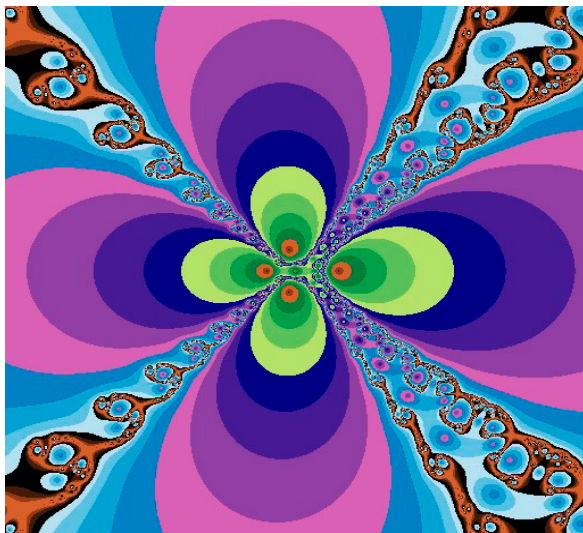
n	$P_{3(n)}$	$\frac{P_{3(n+1)}}{P_{3(n)}}$	n	$P_{3(n)}$	$\frac{P_{3(n+1)}}{P_{3(n)}}$
0	1	0	8	8	1,37
1	0	$\nexists$	9	11	1,54
2	1	1	10	17	1,411
3	1	2	11	24	1,5
4	2	1	12	36	1,44
5	2	2	13	52	1,48
6	4	1,25	14	77	1,45
7	5	1,6	15	112	1,46

Fonte: Elaborado pelos autores

Contudo, a equação dessa sequência como vista no Teorema 16 ($x^4 - x^2 - x - 1 = 0$) possui quatro raízes, duas complexas, uma real positiva e outra real negativa. Ressalta-se que a raiz real positiva possui valor de aproximadamente 1,46, mesmo valor da razão de convergência entre os termos vizinhos dessa sequência.

Com isso, construindo o fractal de Newton dessa sequência, a partir de sua função ($f(x) = x^4 - x^2 - x - 1$), tem-se, como mostrado na Figura 39, a existência de quatro traços, gerados a partir da ramificação do traço central encontrado no fractal de Padovan (ver Figura 31). Verifica-se ainda a presença de quatro lóbulos, traçando-se, portanto, uma linha horizontal na imagem, constatando a existência de duas raízes reais. Observamos que uma está ao lado dos inteiros não positivos e a outra ao lado direito, sendo a primeira a raiz real negativa e a segunda, a raiz real positiva. Esta última representa, portanto, o valor aproximado de 1,46. As demais, localizadas no eixo vertical, são as raízes complexas. Percebe-se ainda uma diminuição do lóbulo laranja e o aumento de cores, existindo mais iterações até a obtenção dos valores exatos das raízes (ALVES, VIEIRA E CATARINO, 2020).

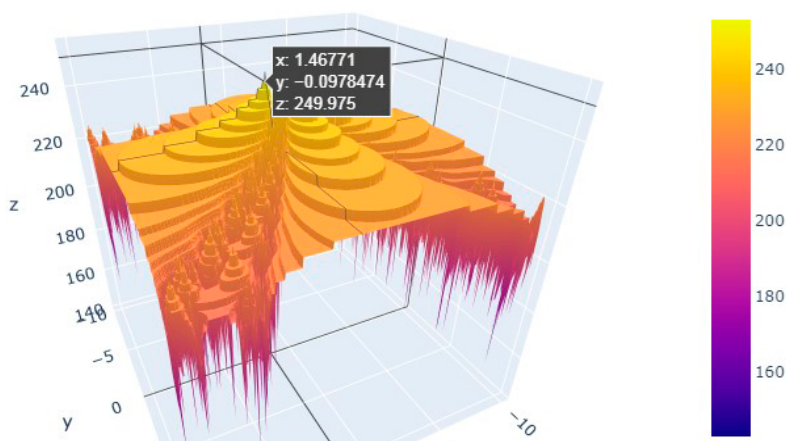
Figura 31 – Fractal de Newton da sequência de Tridovan.



Fonte: Elaborado pelos autores

A representação em 3D do fractal é mostrada na Figura 32, analisando as quatro raízes representadas pelas montanhas, de modo análogo ao que foi feito para a SP. Contudo, é notável destacar a busca pela raiz real, em que se têm os valores de $x = 1,46771$, $y = -0,0978474$ e $z = 249,975$. De acordo com esses valores, percebe-se que y é aproximadamente inexistente, não havendo, portanto, a parte imaginária, e z está bem próximo da escala laranja (valor 260). Para o valor de x , é possível notar a sua aproximação com o valor de convergência entre os termos vizinhos da sequência, dado por 1,46.

Figura 32 – Fractal de Newton da sequência de Tridovan 3D.



Fonte: Elaborado pelos autores

Para a construção do fractal de Newton da sequência de Tetrado-
van, é analisada sua razão de convergência entre os termos vizinhos
dessa sequência. Analisando de forma similar ao que foi realizado
para os números de Tridovan, pode-se estabelecer a razão de conver-
gência entre os termos vizinhos de acordo com a Tabela 11.

Tabela 11 – Análise da convergência entre os termos vizinhos de Tridovan.

n	$P_{4(n)}$	$\frac{P_{4(n+1)}}{P_{4(n)}}$	n	$P_{4(n)}$	$\frac{P_{4(n+1)}}{P_{4(n)}}$
0	1	0	8	10	1,6
1	0	$\cancel{\neq}$	9	16	1,5
2	1	1	10	24	1,5416
3	1	2	11	37	1,5405
4	2	1,5	12	57	1,5263
5	3	1,33	13	87	1,54
6	4	1,75	14	134	1,529
7	7	1,42	15	205	1,53

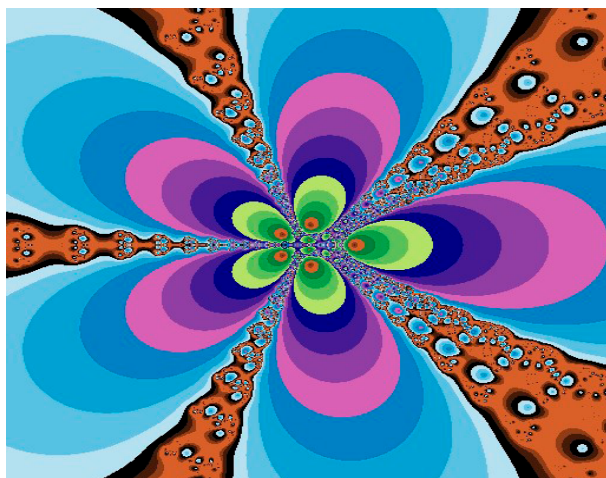
Fonte: Elaborado pelos autores

Portanto, pode-se estabelecer que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{4(n+1)}}{P_{4(n)}} \approx 1,53$.

A equação dessa sequência, como estudada no Teorema 20, possui cinco raízes, sendo quatro complexas e uma real, onde essa raiz real apresenta o valor de aproximadamente 1,53, o mesmo da razão de convergência entre os termos vizinhos desta sequência. Algumas propriedades inerentes a esses números foram estudadas no trabalho de Vieira e Alves (2019d).

Por fim, tem-se a construção do fractal Tetradovan, a partir de sua função ($f(x) = x^5 - x^3 - x^2 - x - 1$), sendo representado pela Figura 33. Nota-se a presença de cinco traços, limitando a descontinuidade das raízes. Esse fractal apresenta ainda cinco lóbulos, representando as raízes da função. Analisando-as, através de um traço horizontal no centro da imagem, verifica-se a existência de apenas uma raiz real, e as demais, que estão fora desse eixo, são as raízes complexas. Essa raiz real apresenta o seu valor aproximado em 1,53, podendo ser encontrado através da análise da Figura 34. Nota-se ainda a diminuição do lóbulo laranja.

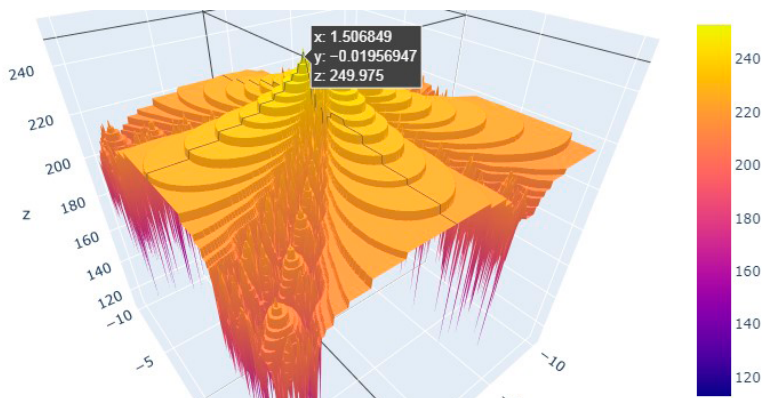
Figura 33 – Fractal de Newton da sequência de Tetradovan.



Fonte: Elaborado pelos autores

A visualização do fractal em uma perspectiva 3D é mostrada na Figura 34, onde se realiza uma análise das cinco raízes representadas pelas montanhas. Com isso, durante a busca pelo valor da raiz real, notam-se os valores de $x = 1,506849$, $y = -0,01956947$ e $z = 249,975$. Assim, percebemos a aproximação da variável x com o valor 1,53, visto anteriormente como sendo uma solução real e a razão de convergência entre os termos vizinhos desta sequência.

Figura 34 – Fractal de Newton da sequência de Tetradovan 3 D.



Fonte: Elaborado pelos autores

Inserindo as figuras dos fractais no plano cartesiano, podemos estimar o valor das raízes, verificando que as cores mais distantes da cor laranja serão os valores mais distantes dos valores das raízes. Já os valores mais próximos do lóbulo de alaranjado serão os mais próximos de zero, ou seja, mais próximos dos valores das raízes da função. Esse processo de busca em grade pela raiz, lóbulos, representa o método de Newton. Assim, as substituições sucessivas para encontrar a raiz da função e a utilização do recurso computacional *Google Colab* facilitam o cálculo e a obtenção das raízes.

Diante dessa análise, pode-se estabelecer um certo padrão de crescimento dos traços. Inicialmente, existem três traços, um central e dois laterais e, a partir das extensões, esse traço central irá se dividir, transformando-se em dois. Quando não existe o traço central, significa que este já foi dividido na extensão anterior, aparecendo novamente na próxima extensão da sequência.

Os lóbulos representam as raízes da função, e verificamos ainda as suas raízes reais e complexas ao traçarmos uma linha horizontal no centro da imagem. Assim, os lóbulos localizados no eixo horizontal representarão as raízes reais, e os localizados no eixo vertical, as raízes complexas.

Trazendo os fractais de Newton da SP, Tridovan e Tetradovan para os objetos existentes na natureza, pode-se notar semelhanças desses com flores vistas numa perspectiva de cima para baixo, em que os seus lóbulos representam as pétalas e sépalas. Com isso, o fractal de Newton da SP representa uma flor trímera, com três pétalas e três sépalas; o fractal de Newton da sequência de Tridovan representa uma flor tetrâmera, com quatro pétalas e quatro sépalas; e o fractal de Newton da sequência de Tetradovan, uma flor pentâmera, com cinco pétalas e cinco sépalas (SANTOS; BONILLA, 2003).

Observa-se a semelhança com a flor gerânio, variando de acordo com as suas pétalas. Percebe-se na Figura 35 essa flor com quatro pétalas e cantos arredondados, aproximando-se de uma elipse. É importante notar ainda as alternâncias de cores das flores, conforme acontece nos lóbulos das figuras discutidas anteriormente. Essa es-

pécie pertence a um grupo de ervas de pequeno arbusto do gênero *Geranium* e *Pelargonium*, conhecida também como sardinheiras. Reunindo cerca de 300 espécies, essas flores são encontradas nas regiões temperadas e tropicais de altitude, das quais várias são cultivadas como ornamentais ou para extração de tanino e tinturas.

Figura 35 – Flor gerânio.



Fonte: Mers (2017)

Vale ressaltar que essas figuras geradas pelo *Google Colab* apresentam uma forma de visualização, podendo ainda ser vistas por um outro ângulo diferente deste mostrado no trabalho.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Seguindo as orientações didático-metodológicas fundamentadas no Ensino de Matemática com a ED e TSD, durante a primeira etapa deste projeto, foram analisados preliminarmente o objeto matemático através de um resgate de alguns artigos científicos recentemente publicados, bem como o estudo de obras específicas que trazem algumas narrativas históricas relativas à SP.

Sobre essa fundamentação, é pertinente destacar que o desenvolvimento do projeto permitiu realizar uma discussão pormenorizada de trabalhos publicados em periódicos de Matemática Pura, os quais abordam o processo de generalização da SP e a sua complexificação, sistematicamente negligenciada pelos livros de HM consultados, ressaltando a ausência do conteúdo de SP.

Nesse sentido, a partir do levantamento e da análise bibliográfica, catalogamos e organizamos um conjunto de modelos, visando realizar, de forma inédita neste trabalho, a generalização e complexificação da SP, com foco para a matriz geradora, generalização dos valores iniciais e dos coeficientes, com a sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{(z-1)})$ -Z-dovan, algumas relações n -dimensionais e quatérnios. Assim, foi possível analisarmos o desenvolvimento matemático de generalização e complexificação da SP.

Nessa perspectiva matemática, foram selecionados os conteúdos da forma martricial de Padovan e a sequência (s_1, s_2) -Padovan para o processo de generalização. Para a complexificação da sequência, foram selecionados os conteúdos Relações bidimensionais e Quatérnios de Padovan. Assim, fizemos uma transposição do assunto para o contexto didático-cognitivo, ressaltando o seu modelo histórico, e permitindo uma discussão dos conceitos e das relações matemáticas.

A pesquisa foi então aplicada na disciplina de HM, no curso de Licenciatura em Matemática do IFCE, após uma minuciosa análise da matriz curricular.

Entretanto, existe uma resistência de docentes e discentes em relação ao estudo das relações matemáticas e suas conjecturas nas aulas de HM, visto que, muitas vezes, estudam apenas a biografia dos matemáticos e os respectivos períodos históricos em que foram desenvolvidas as definições matemáticas. Porém, esse estudo é contraditório quanto à matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática, negligenciando o processo evolutivo epistemológico-matemático de novas relações matemáticas, como apresentado em livros dessa disciplina, nos quais não se discutem propriedades matemáticas recentes (OLIVEIRA, 2018).

Durante a aplicação das atividades propostas, alguns obstáculos epistemológicos foram diagnosticados em relação à formulação das propriedades matemáticas e o seu processo de validação. Esse, portanto, foram superados por meio de interações entre os demais estudantes participantes da pesquisa.

As construções matemáticas, vistas de forma inéditas neste trabalho, permitiram superar alguns obstáculos epistemológicos, criando conceitos matemáticos até então desconhecidos para a sequência estudada. Com isso, observa-se o surgimento da generalização da ordem da sequência, dos seus valores iniciais e dos coeficientes da fórmula de recorrência.

A ED, em associação com a TSD, serviu como um aporte teórico para nortear os percursos metodológicos desta pesquisa, contribuindo para a área de ensino e para a área de matemática, compreendendo a SP e o seu processo de generalização e complexificação. Vale ressaltar que a generalização da sequência foi dada em torno da sua ordem de extensão, obtendo-se a construção da sua forma matricial, polinômio característico, função geradora e fórmula de Binet. Os coeficientes da recorrência finalizam o processo de generalização, estabelecendo a sua matriz geradora, fórmula de Binet, função geradora e polinômio característico.

O processo de complexificação se iniciou com a inserção de unidades imaginárias, destacando-se assim as relações recorrentes bi, tri e n -dimensionais, e seguiu com os quatérnios.

Diante da microengenharia didática e transposição didática, é importante destacar que a sequência foi estudada criando situações de ensino com base na TSD, e analisada e discutida por meio de situações-problema de conteúdos selecionados previamente, visando compreender o processo histórico-evolutivo da SP.

Destaca-se ainda a contribuição do arquiteto Richard Padovan para este trabalho, uma vez que foi o criador da sequência objeto de estudo desta pesquisa. Diante disso, pode-se verificar que a ideia da SP aplicada à arquitetura proporcionou um desdobramento e repercussão na área matemática e em outros campos, tais como na área de ensino. É importante ressaltar ainda que, por não ser um matemático, Padovan não pôde colaborar mais para o desenvolvimento deste projeto, conforme conversa via e-mail com o próprio autor, que se encontra vivo até a presente data.

A utilização do recurso computacional permitiu facilitar a busca pelas raízes dos polinômios característicos, assim como a sua visualização em 3D por meio do fractal de Newton, através da ferramenta do *Google Colab*. Foi possível ainda aproximar esta sequência com objetos existentes na natureza, por meio desta técnica de visualização, facilitando assim o processo de ensino deste conteúdo. Para trabalhos futuros, pode-se aprofundar as pesquisas em torno dos fractais de Newton como forma de visualização da SP, bem como a aplicação desta sequência em outras áreas.

É importante ressaltar que ocorreram algumas limitações durante a pesquisa, destacando-se o fato de que nem todos os alunos conseguiram resolver todas as situações-problema propostas. Porém, com o auxílio dos outros sujeitos participantes, foi possível discutir essas atividades, havendo um entendimento e compreensão dos membros que não haviam conseguido resolvê-las, dando continuidade ao processo. De fato, é considerável ainda apresentar algumas dificuldades

oriundas da aplicação remota, pois alguns alunos não puderam participar das aulas devido à perda de conexão, revisando o conteúdo na aula posterior.

Por fim, a pesquisa possibilitou aos estudantes, professores em formação inicial, ampliar os seus conhecimentos matemáticos na área de sequências lineares e recorrentes, mais especificamente na SP, através de relações matemáticas estudadas com caráter de ineditismo. Contudo, espera-se que esse livro sirva como suporte para outros trabalhos que buscam explorar matematicamente assuntos não triviais, com aporte na TSD, e que não são estudados em curso de formação inicial de professores de matemática. Ressalta-se ainda aplicar outras propriedades inerentes aos números de Padovan, com base nos trabalhos de Vieira e Alves (2019b; 2019c), desenvolvendo-se ainda outras situações de ensino.

REFERÊNCIAS

AARTS, J.; FOKKINK, R.; KRUIJTZER, G. Morphic numbers. **Nieuw Archief voor Wiskunde**, [s. l.], v. 5, n. 2, p. 56–58, 2001.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. 3. ed. [S.l.]: São Paulo: Editora UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT** - Revista Eletrônica de Educação Matemática, [s. l.], v. 11, n. 2, p. 109–141, 2016.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. de Queiroz e S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no gt-19/anped. **REVEMAT** - Revista Eletrônica de Educação Matemática, [s. l.], v. 3, n. 6, p. 62–77, 2008.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. da. Engenharia didática: evolução e diversidade. **REVEMAT** - Revista Eletrônica de Educação em Matemática, [s. l.], v. 7, n. 2, p. 22–52, 2012.

ALVES, C. M. F. S. J. **Fractais**: conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino não universitário. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) - Universidade de Lisboa, Portugal, 2007.

ALVES, F. R. V. Mestrado (acadêmico) em ensino de ciências e matemática: a proposta do Instituto Federal do Ceará (IFCE). **Revista Contexto & Educação**, [s. l.], v. 33, n. 105, p. 305–340, 2018. DOI: 10.21527/2179-1309.2018.105.305-340.

ALVES, F. R. V. Didática de matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educação**, [s. l.], v. 7, n. 21, p. 131–150, 2016a.

ALVES, F. R. V. Engenharia didática (análises preliminares e análise a priori): o caso das equações diferenciais de segunda ordem. **Ensino de ciências e tecnologia em revista**, [s. l.], n. 2, p. 1–22, 2016b.

ALVES, F. R. V. Engenharia didática: implicações para a pesquisa no âmbito do ensino em análise complexa - ac. **Ciência e Natura**, [s. l.], v. 38, n. 2, p. 694–715, 2016c.

ALVES, F. R. V. Sobre a evolução histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas de fibonacci. **Revista Vydia Educação**, [s. l.], v. 35, p. 133–148, 2015.

ALVES, F. R. V. Análise preliminar e análise a priori: Situações didáticas envolvendo a noção de integrais múltiplas. **Reportes de Investigación**, [s. l.], p. 1–9, 2014.

ALVES, F. R. V. Uma discussão de artigos envolvendo propriedades da sequência de fibonacci apoiada na tecnologia. **Anais do VI HTEM**, [s. l.], p. 1–17, 2013.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Engenharia didática de formação (edf): Repercussões para a formação do professor de matemática no brasil. **Educação matemática em revista**, [s. l.], v. 2, n. 18, p. 121–137, 2017.

ALVES, F. R. V.; MARINHO, M. R. M. Engenharia didática no contexto da transição complexa do cálculo-tcc: o caso da série de laurent. **Revista Eletrônica de Investigación en Educación en Ciencias**, [s. l.], v. 12, n. 2, p. 63–89, 2017.

ALVES, F. R. V.; NETO, H. B. A existência de sequência de fibonacci no campo dos inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da sequência fedathi. **Boletim Gepem**, [s. l.], n. 59, p. 135–140, 2011.

ALVES, F. R. V. et al. **Ensino de ciências e educação matemática 3**. In: Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019. v. 3, cap. 2, p. 10–18.

ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P. M.; CATARINO, P. M. M. C. Visualizing the Newtons Fractal from the Recurring Linear Sequence with Google Colab: An Example of Brazil X Portugal Research. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, [s. l.], v. 15, n. 3, e10594, 2020.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, [s. l.], v. 9, n. 3, p. 281–308, 1988.

ARTIGUE, M. et al. **Ingenieria Didactica en Educación Matemática**: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. [S.l.]: Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995.

ASTOLFI, J. P. El trabajo didáctico de los obstáculos, en el corazón de los aprendizajes científicos. **Enseñanza de las Ciencias**, [s. l.], v. 12, n. 2, p. 206–216, 1994.

BACHELARD, G. **A Formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Tradução Esteia dos Santos Abreu. 5ª reimpressão. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BAGUR, B. **The Padovan Sequence in Menorca**. [S. l.: s. n.], 2014. Disponível em: <https://themathematicaltourist.wordpress.com/2015/05/25/the-padovan-sequence-in-menorca/>.

BERGLUND, J. Analyzing the galois groups of fifth-degree and fourth-degree polynomials. **Undergraduate Review**, [s. l.], v. 7, p. 22–28, 2011.

BJÖRCK, A.; PEREYRA, V. Solution of vandermonde systems of equations. **Mathematics of Computation**, [s. l.], v. 112, n. 24, p. 893–903, 1970.

BROUSSEAU, G. **La problématique et l'enseignement de la mathématiques**. In: Comptes rendus de la xxviii^e rencontre organisée par la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques.louvain-la-neuve. [S.l.], 1976. p.101 –117.

BROUSSEAU, G. **D'un problème à l'étude à priori d'une situation didactique**. *Deuxième École d'Été de Didactique des mathématiques, Olivet*. [S. l.: s. n.], 1982. 60 p.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, [s. l.], v. 7, n. 2, p. 33–115, 1986.

BROUSSEAU, G. **Theory of didactical situations in mathematics**. [S.l.]: Dordrecht: Kluwer, 1997.

BROUSSEAU, G. Educación y didáctica de las matemáticas. **Educación Matemática**, [s. l.], v. 12, n. 1, p. 5–38, 2000.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics Didactique de Mathématiques, 1970–1990**. 19. ed. [S.l.]: Mathematics Education Library, 2002.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. [S.l.]: São Paulo: Ática, 2008.

BURTON, A. **Newton's method and fractais**. [S.l.]: Technical manuscript, Whitman College, 2009.

CARREIRA, A. S.; ANDRADE, C. A. D. **Geometria a várias dimensões: fractais**. [S.l.]: Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 1999.

CATARINO, P. M. M. C. Bicomplex k-pell quaternions. **Computational Methods and Function Theory**, [s. l.], v. 19, n. 3, p. 1–12, 2018.

CERDA-MORALES, G. The (s,t)-padovan and (s,t)-perrin matrix sequences. **Submetid**, [s. l.], p. 1–9, fev. 2017. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/313344447>.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. [S.l.]: Buenos Aires: Aique, 1998.

CIVCIV, H.; TÜRKMEN, R. On the (s,t)-fibonacci and fibonacci matrix sequences. **Ars Combinatoria**, [s. l.], n. 87, p. 161–173, 2008.

CLAUDIO, D. M.; MARINS, J. M. **Cálculo numérico computacional: teoria e prática**. São Paulo: Atlas, 2000.

DAVIS, P. J.; RERSH, R. **The mathematical experience**. New York: Penguin Press Science, 1999.

DISKAYA, O.; MENKEN, H. On the split (s,t)-padovan and (s,t)-perrin quaternions. **International Journal of Applied Mathematics and Informatics**, [s. l.], v. 13, p. 25–28, 2019.

ERCOLANO, J. Matrix generators of pell sequences. **The Fibonacci Quarterly**, [s. l.], v. 17, n. 1, p. 71–77, fev. 1979.

FALCON, S.; PLAZA, A. On the fibonacci k-numbers. **Chaos, Solitons & Fractals**, [s. l.], v. 32, n. 5, p. 1615–1624, 2007.

FAMILTON, J. **Quaternions: A History of Complex Noncommutative Rotation Groups in Theoretical Physics**. 2015. Tese (Doutorado em Mathematics Education) – Columbia University, 2015.

FERREIRA, R. de C. **Números Mórficos**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.

GULEC, H. H.; TASKARA, N. On the (s,t)-pell and (s,t)-pell-lucas sequences and their matrix representations. **Applied Mathematics Letters**, [s. l.], n. 25, p. 1554–1559, 2012.

HARE, K.; PRODINGER, H.; SHALLIT, J. Three series for the generalized golden mean. **The Fibonacci Quarterly**, [s. l.], v. 52, p. 307–313, 2014.

HARMAN, C. J. Complex fibonacci numbers. **The Fibonacci Quarterly**, [s. l.], v. 19, p. 82–86, 1981.

HORADAM, A. F. Quaternion recurrence relations. **Ulam Quarterly**, [s. l.], v. 2, p. 23–33, 1993.

HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. **Topics in Matrix Analysis**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994.

HUNTLEY, H. E. **A divina proporção**: um ensaio sobre a beleza na matemática. Tradução Luís Carlos Ascêncio Nunes. [S.l.]: Universidade de Brasília, 1985.

INTERNATIONAL, I. M. **Les anciens membres de l'IMI**. [S. l.: s. n.], 2019. Disponível em: <https://www.metapsychique.org/les-anciens-membres-de-limi/>. Acesso: 10 Fev. 2019.

KANTOR, I.; SOLODOVNIKOV, A. S. **Hypercomplex Numbers**: an elementary introduction to algebras. Translated by A. Shenitzer. [S. l.: s. n.], 1989.

KNOPP, K. **Theory and Applications of Infinite Series**. [S.l.]: Dover Publications Inc., Nova Iorque, EUA, 1990.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications**. [S.l.]: WileyInterscience, 2001.

LABORDE, C. Affronter la complexité des situations didactiques d'apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. **Didaskalia**, [s. l.], n. 1, p. 97–112, 1997.

LLORCA-BOFÍ, J.; MADRIGAL, J. J. Van der laan and messiaen's creative freedom from a system. **ACE: Architecture, City and Environment**, [s. l.], v. 14, n. 40, p. 275–296, 2019.

LOPES, A. R. C. **Conhecimento escolar**: ciência e cotidiano. Rio de Janeiro: EdUERJ, 1999. 236 p.

MANGUEIRA, M. C. dos S. et al. The hybrid numbers of padovan and some identities. **Annales Mathematicae Silesianae**, [s. l.], p. 000010247820200019, 2020.

MARGOLINAS, C. Connaissance et savoir des distinctions frontalières? Sociologie et didactiques: vers une transgression des frontières. **Revue française de pédagogie**, Lausanne, Suisse, p. 1–39, 2012.

MAROHNIC, L.; STRMECKI, T. Plastic number: construction and applications. **Advanced Research in Scientific Areas**, [s. l.], p. 3–7, dec 2012.

MELZER, E. E. M. A teorias de chevallard e fleck: relações entre a transposição didática e o tráfego de pensamentos. In: **EDUCERE- XII Congresso Nacional de Educação**. [S.l.], 2015. p. 460–474.

MEYER, A. R.; RUBINFELD, R. Generating functions. In: **Mathematics for Computer Science**, Course Notes – Massachusetts Institute of Technology. [S.l.], 2005. p. 1–13.

MERS, J. de. Pixabay. **Flor Gerânio**. [S. l.: s. n.], 2017. Disponível em: <https://pixabay.com/pt/photos/ger%c3%a2nio-rosa-suave-cor-de-rosa-flores-2729139/>. Acesso em: 08 fev 2023.

MONNEROT-DUMAINE, A. **The Fibonacci Word fractal**. [S.l.]: Hal - archives-ouvertes, 2009. 24 p.

OLIVEIRA, G. P.; ARAÚJO, P. B. Uma abordagem para o ensino de lugares geométricos com o geogebra. **REVEMAT** - Revista Eletrônica de Educação Matemática, [s. l.], v. 7, n. 2, p. 209–222, 2012.

OLIVEIRA, R. R. de. **Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações Recorrentes N-dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), 2018.

OLIVEIRA, R. R. de; ALVES, F. R. V.; PAIVA, R. E. B. Identidades bi e tridimensionais para os números de fibonacci na forma complexa. **C. Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, [s. l.], v. 11, n. 2, p. 91–106, 2017.

OLIVEIRA, R. R. de; ALVES, F. R. V.; SILVA, S. A. da. Uma proposta de atividades com enfoque na teoria das situações didáticas: identidades bi e tridimensionais fibonaccianas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, [s. l.], v. 9, n. 3, p. 1–13, 2019.

OLIVEIRA, R. R. de *et al.* **Engenharia didática: Análises prévias e a priori para a concepção de um objeto de aprendizagem**. In: Relatos e investigação de práticas de ensino de Ciências e Tecnologia – Atas do Encontro Internacional “A Voz dos Professores de C&T” (VPCT 2018). [S. l.]: Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, 2018.

PADOVAN, R. **Dom Hans van der Laan: modern primitive**. [S.l.]: Amsterdam, Architecture & Natura Press, 1994.

PADOVAN, R. Dom hans van der laan and the plastic number. **Nexus Network Journal**, [s. l.], v. 4, p. 181–193, 01 2002.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PERRIN-GLORIAN, M. J.; BELLEMAIN, P. M. B. L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation desmaîtres. In: **I Seminário Latino-Americano de Didática da Matemática - LADIMA**. [S. l.: s. n.], 2016. p. 1–51.

REES, E. L. Graphical discussion of the roots of a quartic equation. **The American Mathematical Monthly**, [s. l.], v. 2, n. 29, p. 51–55, 1992.

RODRIGUES, H. W.; GRUBBA, L. S. Bachelard e os obstáculos epistemológicos à pesquisa científica do direito. **Sequência: Estudos Jurídicos e Políticos**, [s. l.], v. 33, n. 64, p. 307–333, 2012.

SANTOS, A. A. dos. **Engenharia Didática sobre o Estudo e Ensino da Fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da Sequência de Fibonacci**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), 2017.

SANTOS, A. dos; ALVES, F. R. V. A engenharia didática em articulação com a teoria das situações didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de matemática. **Acta Scientiae**, [s. l.], v. 19, n. 3, p. 447–465, maio/jun 2017.

SANTOS, J. H. R.; BONILLA, H. **Organografia das fanerógamas**. Monografia (Graduação em Ciências Biológicas) - Universidade do Estado do Ceará, 2003.

SEENUKUL, P. *et al.* Matrices which have similar properties to padovan q -matrix and its generalized relations. **Sakon Nakhon Rajabhat University Journal of Science and Technology**, [s. l.], v. 7, n. 2, p. 90–94, 2015.

SILVA, I. C. da. **Recorrências**: uma abordagem sobre sequências recursivas para aplicações no Ensino Médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de Brasília, 2015.

SOKHUMA, K. Padovan q-matrix and the generalized relations. **Applied Mathematical Sciences**, [s. l.], v. 7, n. 1, p. 2777–2780, 2013.

SOYKAN, Y. Generalized pell-padovan numbers. **Asian Journal of Advanced Research and Reports**, [s. l.], v. 11, n. 2, p. 8–28, 2020.

SPINADEL, V. M. W. de; BUITRAGO, A. R. Towards van der laan's plastic number in the plane. **Journal for Geometry and Graphics**, [s. l.], v. 13, n. 2, p. 163–175, 2009.

STEWART, I. Tales of a neglected number. **Mathematical Recreations - Scientific American**, [s. l.], v. 274, p. 102–103, 1996.

Sá, L. S. C.; SPREAFICO, E. V. P. Sobre um novo método de inversão de matrizes de vandermonde para solução de recorrências lineares homogêneas de ordem superior. **Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática**, [s. l.], v. 8, n. 1, p. 64–72, 2020.

TAHER, R. B.; RACHIDI, M. Solving some generalized vandermonde systems and inverse of their associate matrices via new approaches for the binet formula. **Applied Mathematics and Computation**, [s. l.], v. 290, p. 267–280, 2016.

TAS, S.; KARADUMAN, E. The padovan sequences in finite groups. **Chiang Mai Journal of Science**, [s. l.], v. 41, p. 456–462, 09 2014.

TASCI, D. Padovan and pell-padovan quatérnios. **Journal of Science and Arts**, [s. l.], v. 42, n. 1, p. 125–132, 2018.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de guy brousseau. **Zetetiké-FE/Unicamp**, [s. l.], v. 21, n. 39, p. 155–168, 2013.

TEODORO, M. M.; AGUILAR, J. **O método de Newton e fractais**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de São João del-Rei, 2015.

VERRET, M. **Le temps des études**. Paris: Honoré Champion, 1975.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Explorando a sequência de padovan através de investigação histórica e abordagem epistemológica. **Boletim Gepem**, [s. l.], v. 74, p. 161–169, 2019a.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Identidades tribonacci. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, [s. l.], n. 1, p. 216–226, 2019b.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Os números duais de padovan. **Revista de Matemática da UFOP - RMAT**, [s. l.], v. 2, p. 52–61, 2019c.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Propriedades das extensões da sequência de padovan. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, [s. l.], v. 15, p. 24–40, 2019d.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Sequences of tridovan and their identities. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, [s. l.], v. 25, n. 3, p. 185–197, 2019e.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Engenharia didática e a sequência de padovan e tridovan: uma análise preliminar e a priori. **UNION - Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, [s. l.], v. 16, n. 59, p. 227–251, 2020.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Alternative views of some extensions of the padovan sequence with the google colab. **Anale. Seria Informatica**, XVII, [s. l.], n. 2, p. 266–273, 2019a.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Relações bidimensionais e identidades da sequência de leonardo. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, [s. l.], n. 2, p. 156–173, 2019b.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Sequência matricial (s1, s2, s3)-tridovan: aspectos históricos e propriedades. **C.Q.D.-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, [s. l.], v. 16, p. 100–121, 2019c.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Uma exploração da sequência de padovan num curso de licenciatura em matemática. **Indagatio Didactica**, [s. l.], v. 11, n. 4, p. 261–279, 2019d.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A historical analysis of the padovan sequence. **International Journal of Trends in Mathematics Education Research**, [s. l.], v. 3, n. 1, p. 8–12, 2020a.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Uma engenharia didática no processo de investigação da generalização da sequência de padovan: uma experiência em um curso de licenciatura. **Acta Scientiae**, [s. l.], 2020b.

VOET, C.; SCHOONJANS, Y. Benidictine thought as a catalist for 20tm century liturgical space: the motivation behind dom hans van der laan s aesthetic church arquitectury. **Proceeding of the 2nd international conference of the Europa Architetur al History of Network**, [s. l.], p. 255–261, 2012.

YILMAZ, N.; TASKARA, N. Matrix sequences in terms of padovan and perrin numbers. **Journal of Applied Mathematics**, [s. l.], p. 1–7, 2013.

ZIERLER, N. Linear recurring sequences. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, [s. l.], v. 7, n. 1, p. 31–48, 1959.



AUTORES



Renata Passos Machado Vieira

Doutoranda em Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN) – polo Universidade Federal do Ceará (UFC). Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (2020), especialista em Gestão Escolar e Práticas Pedagógicas pela Universidade Candido Mendes (RJ) (2016), graduada em Engenharia de Telecomunicações pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (2013) e em Licenciatura em Matemática pela Faculdade Integrada da Grande Fortaleza (2014). Atualmente é professora da Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC) e desenvolve pesquisas direcionadas ao ensino de matemática.



Francisco Regis Vieira Alves

Doutor com ênfase no ensino de Matemática (Universidade Federal do Estado do Ceará-2011). Possui mestrado em Matemática Pura pela Universidade Federal do Ceará (2001) e mestrado em Educação, com ênfase em Educação Matemática, pela Universidade Federal do Ceará (2002), graduação em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1998), graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1997). Atualmente é professor titular do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do estado do Ceará - com dedicação exclusiva, do curso de Licenciatura em Matemática e Bolsista de Produtividade em Pesquisa do CNPq - Nível (2020 - 2023). Na Universidade Aberta do Brasil, com o ensino a distância de Matemática. Desenvolve pesquisa direcionada para o ensino do Cálculo a Várias Variáveis e sua transição interna. Atua também no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA) - UFC.

**Paula Maria Machado Cruz Catarino**

Doutora em Matemática - área de especialização em Semi-grupos - University of Essex em 1998, professora associada na Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. Atua nas áreas de Ciências Exatas com ênfase em Matemática, Ciências Exatas com ênfase em outras Ciências Exatas e Ciências Sociais com ênfase em Ciências da Educação. Desenvolve pesquisa direcionada para o ensino de matemática.



Este livro foi composto em fonte IBM Plex Serif, impresso no formato 15 x 21 cm em Off set 75g/m², com 196 páginas e em e-book formato pdf.
Novembro de 2023.

